Continuité et dérivabilité

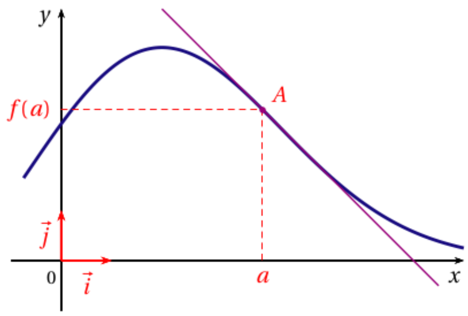
I Rappels sur la dérivabilité :

A Tangente à la courbe

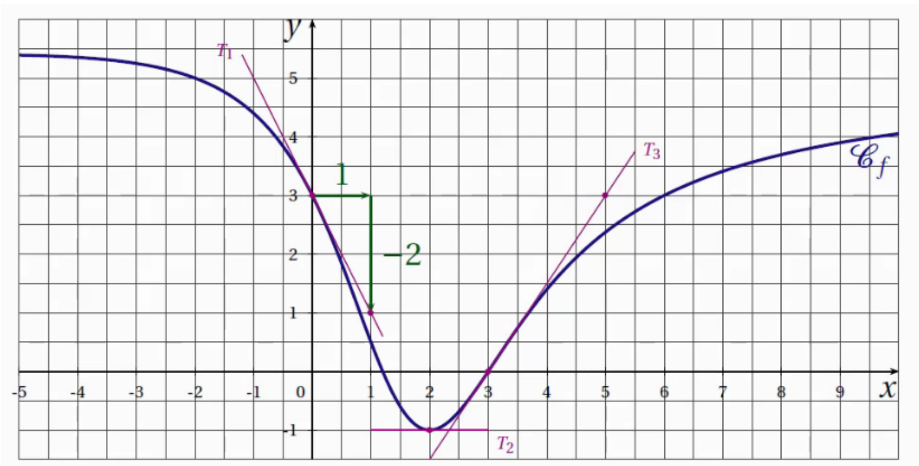
Définition 1 :
Si une fonction f est dérivable sur I , on appelle fonction dérivée la fonction f' définie sur I qui à tout antécédent x associe $f'(x)$, où $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse .

Exemple 1 :
Sur cette représentation graphique d'une fonction f tracée en bleu, on a tracé au point $A(a; f(a))$ la tangente à la courbe en violet.

Le nombre dérivée en a, noté $f'(a)$ est d'après la définition, le coefficient directeur de la tangente,
Attention de bien distinguer :
•$f(a)$ qui est **l'image** de a par la fonction f. On aurait approximativement $f(a) \approx 3$.
•$f'(a)$ qui est le **coefficient directeur** de la droite violette. Ce coefficient serait ici clairement négatif puisque la droite "descend". $f'(a) \approx -1$



Application:
La courbe C_f tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.



Propriété 1 :
Soit une fonction définie sur un intervalle D et $M(a; f(a) =$ un point tel que $a \in D$:
La courbe représentative de la fonction f admet une tangente (T) au point M d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Voir cette vidéo si besoin pour la démonstration de ce résultat fondamental.

Méthode :
f est une fonction dérivable sur $[-2;3]$. On sait que : $f(1) = 2$ et $f'(1) = -1$.
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de en 1.
D'après la relationd e cours, on sait que :
$(T) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$
d'où ici :
$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$
$(T) : y = -1 \times (x-1) + 2$
$(T) : y = -x + 3$

B Les Formules de dérivabilité :

Propriété 1 :
On rappelle les formules de dérivations des fonctions de références :

Expression de la fonction	définie sur	Expression de la dérivée	définie sur
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$

On fera bien attention au domaine de dérivabilité qui change pour la fonction racine carrée, dont la dérivée n'existe pas en zéro.
Voir cette vidéo si besoin pour s'en convaincre.

Propriété 2 :
On rappelle les formules de dérivées de somme, produit et quotient de fonctions :
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I,
on appelle $I^* = \{x \in I \quad \text{tel que} \quad v(x) \neq 0\}$
Soit k un nombre réel.

Expression de la fonction	définie sur	Expression de la dérivée	définie sur
$u + v$	I	$u' + v'$	I
$k \times u$	I	$k \times u'$	I
$u \times v$	I	$u'v + uv'$	I
$\dfrac{u}{v}$	I^*	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	I^*
u^2	I	$2uu'$	I
$\dfrac{1}{v}$	I^*	$-\dfrac{v'}{v^2}$	I^*

Exemple 1 :
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes, définies sur $[1;10]$
$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7 \quad g(x) = \dfrac{3}{x} - 4\sqrt{x} \quad h(x) = \sqrt{x}(x-5) \quad i(x) = \dfrac{4-3x^2}{7x+2}$

C Sens de variations et extremum :

Propriété 1 :
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, alors :
- f est croissante sur I équivaut à dire que pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$
- f est décroissante sur I équivaut à dire que pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$

Propriété 2 :
- Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$
- Si la dérivée f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0

Méthode :
Déterminer le sens de variation de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 2x - 1$.
La fonction admet-elle un maximum local ? Si oui, le préciser.

Correction :
On calcule la dérivée de f:
$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$
On étudie le signe de f' pour en déduire les variations de f :
On résout $3x^2 - 2x - 2 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 4 + 24 = 28 > 0$
L'équation admet deux solutions:
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{2+\sqrt{28}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{2-\sqrt{28}}{6}$
$S = \left\{ \dfrac{1+\sqrt{7}}{3} ; \dfrac{1-\sqrt{7}}{3} \right\}$
$f(x_1) = -\dfrac{47+14\sqrt{7}}{27} \approx -3 \quad f(x_2) = \dfrac{-47+14\sqrt{7}}{27} \approx -0,4$
f' s'annule et change de signe en en x_1 et en x_2.
Il y a donc des extrémums locaux en x_1 et en x_2.

x	$-\infty$		x_2		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	$f(x_2)$	↗	$f(x_1)$	↘	

D'après le tableau de variations, f admet donc un maximum local en $x_2 = \dfrac{2-\sqrt{28}}{6}$ qui vaut
$f(x_2) = \dfrac{-47+14\sqrt{7}}{27} \approx -0,4$

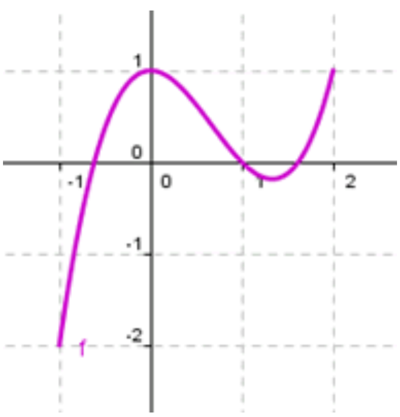
II Continuité sur un intervalle :

A Définition :

Remarque 1 :
La définition mathématique de la continuité d'une fonction sur un intervalle est **hors programme** .
On se limitera ici à une définition intuitive et graphique qui nous suffira pour résoudre les problèmes proposés.

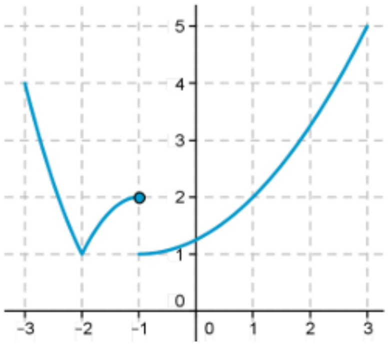
Définition 1 :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **continue** sur I si on peut tracer la courbe représentative de f sur I "*sans lever le crayon*".

Exemple 1 :



On dit que la fonction représentée est continue sur [-1;2]

Exemple 2 :



On dit que la fonction représentée n'est pas continue sur[-3;3].
On est obligé de "*lâcher*" le stylo en -1
Par contre, elle est continue sur [-3 ; -1]

Remarque 2 :
Dans un tableau de variations de fonction, il est convenu que les flèches obliques indiquent que la fonction est continue et strictement monotone

B Propriété (admise)

Propriété 1 :
Une fonction dérivable sur un intervalle I est aussi continue sur I

Remarque 1 :
Dès qu'on sait qu'une fonction est dérivable sur un intervalle, on peut en déduire qu'elle est continue sur cet intervalle.

Exemple 1 :
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 1$.
f étant une fonction polynôme, on sait qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ par conséquence, f est continue sur $\mathbb{R}$

Attention : La réciproque est fausse !
On a : f dérivable sur $I \Rightarrow f$ continue sur I
Mais f continue sur $I \nRightarrow f$ dérivable sur I

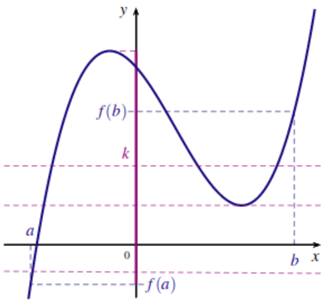
Exemple 2 :
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0 alors qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour plus d'infos et la démonstration de la non-dérivabilité de cette fonction en zéro, voir cette vidéo

III Théorème des valeurs intermédiqires :

A Théorème :

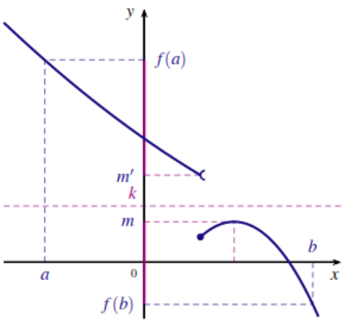
Propriété 1 :
Théorème des valeurs intermédiaires :
Si f est une fonction continue sur $[a;b]$, Si k est un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
Alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur $]a;b[$.

Exemple 1 :



La fonction f est bien continue sur $[a;b]$.
L'image de l'intervalle $[a;b]$ est donc un intervalle .
Tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'au moins un élément de $[a;b]$.

Exemple 2 :



La fonction f n'est pas continue sur $[a;b]$.
L'image de l'intervalle $[a;b]$ n'est pas un intervalle.
Il existe des réels k compris entre a et b pour lesquels l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.
On ne peut donc pas appliquer le théorème des valeurs intéermédiaires dans cette situation.

Application :
La fonction f vérifie le tableau de variation ci-dessous.

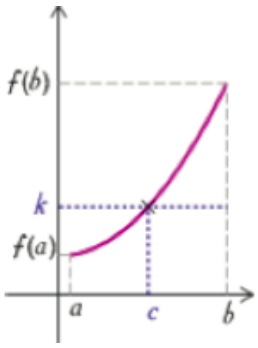
x	-3	1	2	7
$f(x)$	25 ↘	10 ↗	15 ↘	8

Montrer que l'équation $f(x) = 12$ admet au moins une solution sur $[-3;7]$.

B Corollaire:

Propriété 1 :
Soit une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a et b deux réels appartenant à I,
tels que $aSi f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$
Alors pour tout k réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
Alors l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution sur $]a;b[$.

Exemple 1 :



On a une fonction continue et strictement croissante sur $[a;b]$,
elle est donc strictement monotone sur $[a;b]$.
L'équation $f(x)=k$ admet donc une solution unique k appartenant à $[a;b]$.

Application :
La fonction f vérifie le tableau de variation ci-dessous.

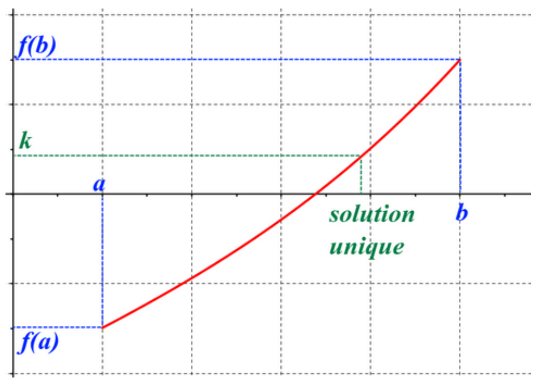
x	-3		1		2		7
$f(x)$	25	$\searrow$	10	$\nearrow$	15	$\searrow$	8

Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution sur $]-\infty;3]$

C Cas particulier :

Propriété 1 :
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$,
Si $f(a)\times f(b)<0$ (c’est à dire que $f(a)$ et $f(b$à) sont de signes opposés),
alors l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique dans $[a;b]$.

Exemple 1 :



On a f une fonction continue et strictement croissante sur $[a;b]$ donc monotone sur $[a;b]$.
On a aussi $f(a)<0$ et $f(b)>0$ donc on a bien $f(a)\times f(b)<0$
L'équation $f(x)=0$ admet donc une solution unique dans $[a;b]$.

Remarque 1 :
C’est un outil pratique pour prouver qu’une équation complexe du type $f(x)=0$ possède une unique solution.

Application :
Montrer que l’équation $x^3+x^2-5=0$ admet une unique solution sur $[0;3]$, dont on donnera une valeur approchée au dixième.