

Méthodes et notions essentielles

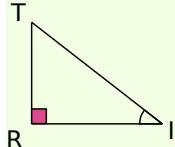
Méthode 1 : Écrire la relation liant angle et longueurs à l'aide du cosinus

À connaître :

Dans un **triangle rectangle**, le **cosinus d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

Remarque : Le cosinus d'un angle aigu est toujours compris entre 0 et 1.

Exemple : Le triangle TRI est rectangle en R. Écris la formule donnant le cosinus de l'angle \widehat{TIR} .



L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. Dans le triangle TRI l'hypoténuse est donc [IT].

Le côté adjacent à l'angle \widehat{TIR} est le côté joignant le sommet de l'angle droit au sommet de l'angle \widehat{TIR} . Le côté adjacent à l'angle \widehat{TIR} est donc [RI].

Le triangle TRI est rectangle en R donc

$$\cos \widehat{TIR} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{TIR}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \widehat{TIR} = \frac{RI}{TI}.$$

À toi de jouer

1 ALI est un triangle rectangle en L. Écris les rapports de longueurs donnant $\cos \widehat{IAL}$ et $\cos \widehat{AIL}$.

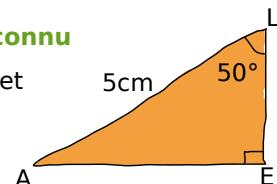
2 ZOE est un triangle rectangle en Z. Les rapports suivants sont-ils les cosinus d'un angle aigu de ZOE et si oui lesquels : $\frac{OZ}{OE}$; $\frac{EO}{EZ}$; $\frac{EZ}{EO}$ et $\frac{ZO}{ZE}$?

Méthode 2 : Calculer des longueurs

Exemple 1 : Calcul de la longueur du côté adjacent à l'angle connu

On considère un triangle LEA rectangle en E tel que $LA = 5 \text{ cm}$ et $\widehat{ELA} = 50^\circ$.

Calcule la longueur du côté [LE] arrondie au millimètre.



Le triangle LEA est rectangle en E donc

On cite les hypothèses : un triangle rectangle.

$$\cos \widehat{ELA} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ELA}}{\text{hypoténuse}}$$

On écrit le cosinus d'un angle : la longueur cherchée doit apparaître dans le rapport.

$$\cos \widehat{ELA} = \frac{EL}{LA}$$

$$EL = LA \times \cos \widehat{ELA}$$

On applique la règle des produits en croix.

$$EL = 5 \times \cos 50^\circ$$

On vérifie que la calculatrice est en degrés. On saisit $5 \times \frac{\cos' \cos}{\cos}$ 50.

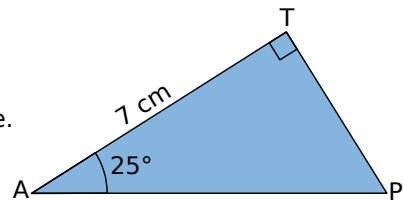
$$EL \approx 3,2 \text{ cm}$$

EL est inférieur à l'hypoténuse : le résultat est cohérent.

Méthodes et notions essentielles

Exemple 2 : Calcul de la longueur de l'hypoténuse

- On considère PAT un triangle rectangle en T tel que AT = 7 cm et $\widehat{PAT} = 25^\circ$. Calcule la longueur du côté [PA] arrondie au millimètre.



Le triangle PAT est rectangle en T donc

$$\cos \widehat{PAT} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{PAT}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \widehat{PAT} = \frac{AT}{PA}$$

$$PA = \frac{AT}{\cos \widehat{PAT}}$$

$$PA = \frac{7}{\cos 25^\circ}$$

$$PA \approx 7,7 \text{ cm}$$

On cite les hypothèses : un triangle rectangle.

On écrit le cosinus de l'angle connu.

On applique la règle des produits en croix.

On vérifie que la calculatrice est en degrés. On saisit $7 \div \frac{\cos^2}{\cos} 25$

PA est supérieure à AT : le résultat est cohérent.

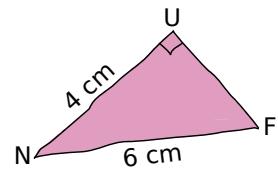
À toi de jouer

- 3** Le triangle NIV est rectangle en N, VI = 10 cm et l'angle \widehat{VIN} mesure 12° . Donne la valeur arrondie au dixième de la longueur NI.
- 4** Le triangle AUE est rectangle en U : UA = 3 cm et $\widehat{EAU} = 19^\circ$. Donne la valeur arrondie au dixième de la longueur de [EA].

Méthode 3 : Calculer la mesure d'un angle

- Exemple :** Soit FUN un triangle rectangle en U tel que NF = 6 cm et UN = 4 cm.

Calcule la mesure de l'angle \widehat{UNF} arrondie au degré. Déduis-en la valeur approchée au degré près de la mesure de l'autre angle aigu du triangle.



Le triangle FUN est rectangle en U donc

On cite les hypothèses : un triangle rectangle.

$$\cos \widehat{UNF} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{UNF}}{\text{hypoténuse}}$$

On écrit le cosinus de l'angle cherché.

$$\cos \widehat{UNF} = \frac{UN}{NF}$$

$$\cos \widehat{UNF} = \frac{4}{6}$$

$$\widehat{UNF} \approx 48^\circ$$

On vérifie que la calculatrice est en degrés.

On saisit **2nde** **SHIFT** puis **COS** ($4 \div 6$)

Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.

Ainsi $\widehat{UNF} + \widehat{NFU} = 90^\circ$ soit $\widehat{NFU} \approx 90^\circ - 48^\circ \approx 42^\circ$.

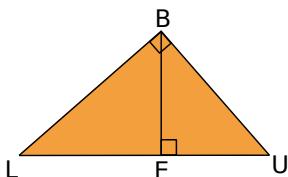
À toi de jouer

- 5** Le triangle EXO est rectangle en X : OX = 3 cm et OE = 7 cm. Calcule les valeurs arrondies au degré de la mesure des angles \widehat{EOX} et \widehat{XEO} .

Exercices d'entraînement

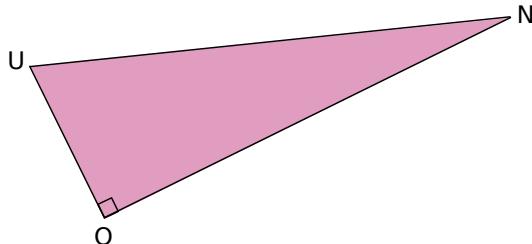
Écrire le cosinus

1 Attention au triangle !



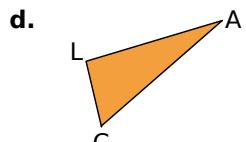
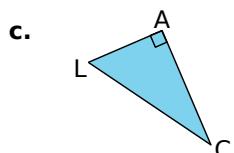
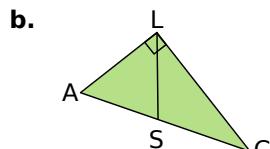
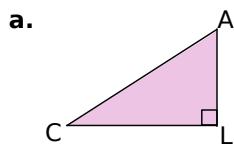
- a. Dans le triangle rectangle BEU :
 - quelle est l'hypoténuse ?
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{BUE} ?
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{EBU} ?
- b. Dans le triangle rectangle BEL :
 - quelle est l'hypoténuse ?
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{BLE} ?
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{EBL} ?
- c. Dans le triangle rectangle BLU :
 - quelle est l'hypoténuse ?
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{BLU} ?
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{BUL} ?

2 Histoire d'angles



- a. Dans le triangle ONU :
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{ONU} ?
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{OUN} ?
- b. Écris le cosinus de l'angle \widehat{ONU} et le cosinus de l'angle \widehat{OUN} .

3 Dans chaque cas, écris, si possible, le cosinus de l'angle \widehat{LAC} .



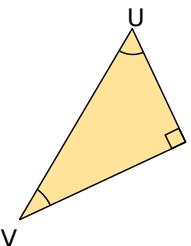
4 SEL est un triangle rectangle en S. Écris le cosinus de l'angle \widehat{SEL} .

5 Quelle écriture pour quel angle ?

De quel angle calcule-t-on le cosinus lorsqu'on écrit :

a. $\frac{UI}{UV}$?

b. $\frac{VI}{VU}$?



Avec la calculatrice

6 À l'aide de ta calculatrice, donne l'arrondi au centième des cosinus suivants :

$$\cos 78^\circ \quad \cos 35^\circ \quad \cos 56^\circ \quad \cos 12^\circ$$

7 À l'aide de ta calculatrice, donne, si possible, l'arrondi à l'unité des angles dont le cosinus vaut :

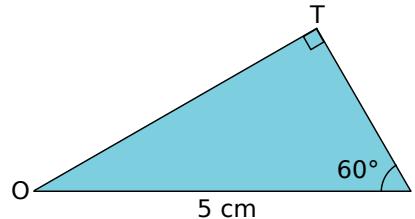
$$0,5 \quad 0,1 \quad 0,78 \quad 1,7$$

8 Complète le tableau suivant avec des troncatures au dixième :

Angle (en degrés)	26			72
Cosinus de l'angle		0,7	0,01	

Calculs de longueur

9 Calcul de la longueur du côté adjacent



a. Écris le cosinus de l'angle \widehat{TOI} .

b. Déduis-en la longueur TI.

c. Quelle est la mesure de l'angle \widehat{TOI} ?

d. Écris le cosinus de l'angle \widehat{TOI} .

e. Déduis-en la longueur TO.

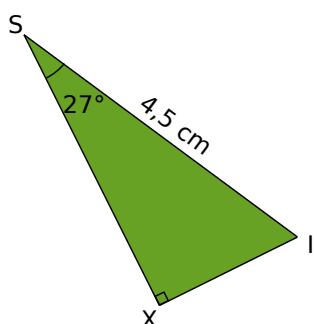
Exercices d'entraînement



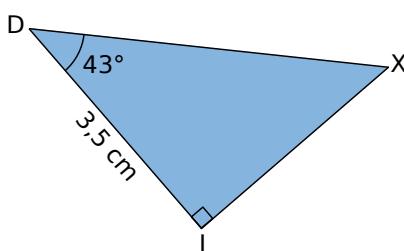
10 Calcul de la longueur du côté adjacent, (bis)

a. Écris le cosinus de l'angle \widehat{ISX} .

b. Déduis-en la longueur SX , au millimètre près.



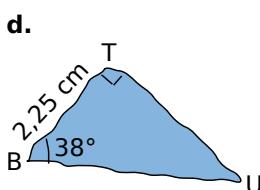
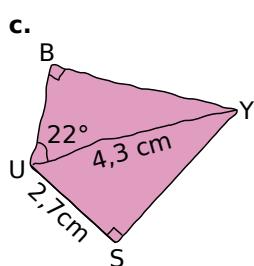
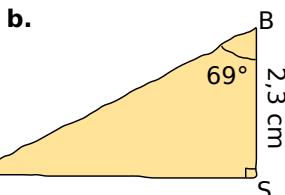
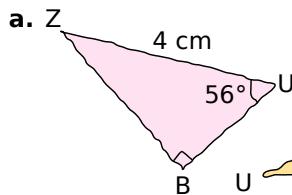
11 Calcul de l'hypoténuse



a. Écris le cosinus de l'angle \widehat{IDX} .

b. Déduis-en l'arrondi au dixième de la longueur DX .

12 Dans chaque cas, calcule BU (donne l'arrondi au dixième).



13 BON est un triangle rectangle en O tel que $ON = 4 \text{ cm}$ et $\widehat{ONB} = 40^\circ$. Donne la troncature au centième de BN .

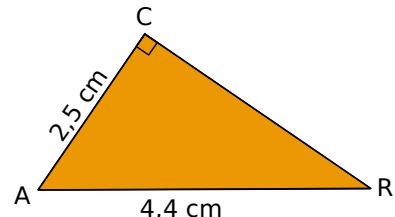
14 TER est un triangle rectangle en E tel que $TR = 6 \text{ cm}$ et $\widehat{TRE} = 50^\circ$. Donne l'arrondi au centième de ER .

Calculs de la mesure d'un angle

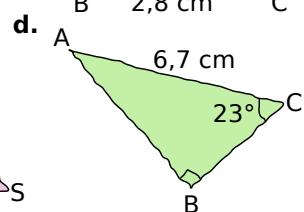
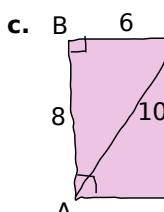
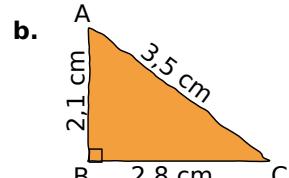
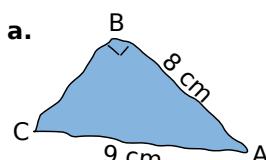
15 Quand les côtés de l'angle sont connus

a. Écris le cosinus de l'angle \widehat{CAR} .

b. Déduis-en la mesure arrondie au degré de l'angle \widehat{CAR} .

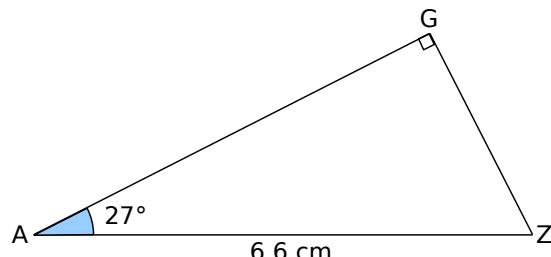


16 Dans chaque cas, calcule la mesure de l'angle \widehat{BAC} , si possible (donne l'arrondi à l'unité).



17 FER est un triangle rectangle en E tel que $FE = 3 \text{ cm}$; $ER = 4 \text{ cm}$ et $FR = 5 \text{ cm}$. Donne la troncature au dixième des angles de ce triangle.

Calculs d'angles et de longueurs



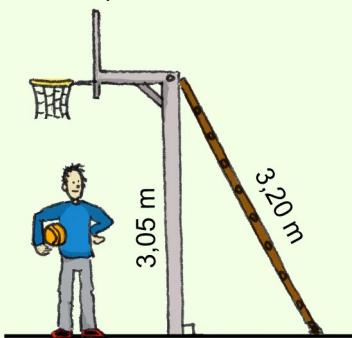
a. Détermine la valeur de \widehat{GZA} .

b. Donne l'arrondi au dixième de GZ .

Exercices d'entraînement

19 Extrait du Brevet

- a. Paul veut installer chez lui un panier de basket. Il doit le fixer à 3,05 m du sol. L'échelle dont il se sert mesure 3,20 m de long.
À quelle distance du pied du mur doit-il placer l'échelle pour que son sommet soit juste au niveau du panier ? Donner une valeur approchée au cm près.



- b. Calculer l'angle formé par l'échelle et le sol. Donner une valeur approchée au degré près.

20 Histoire de bougies !

- a. Sur le gâteau d'anniversaire de Luc, une bougie de 5 cm de hauteur n'était pas verticalement plantée. Elle a déposé de la cire à 1 cm de son pied.
Quel est son angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale ?



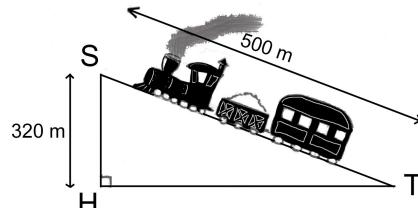
- b. Le support plastique de la bougie a un rayon de 0,4 cm. De combien peut-on, au maximum, incliner la bougie pour que la cire ne tombe pas sur le gâteau ?

21 Coup de vent !

- Une bille roule sur la largeur d'une table rectangulaire de 80 cm de large.
Lorsque la bille arrive au milieu de la largeur de la table, un ventilateur la dévie de son parcours d'un angle de 20° .
Quelle longueur parcourt finalement la bille ?

22 A toute vapeur !

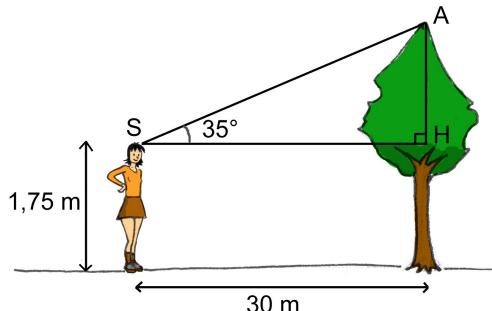
- Pour s'élever de 320 m, un train parcourt une montée de 500 m.



- a. Détermine l'arrondi à l'unité de la mesure de l'angle $\widehat{TS\bar{H}}$.
- b. Déduis-en l'arrondi à l'unité de l'inclinaison de la pente par rapport à l'horizontale.

23 Hauteur d'un arbre

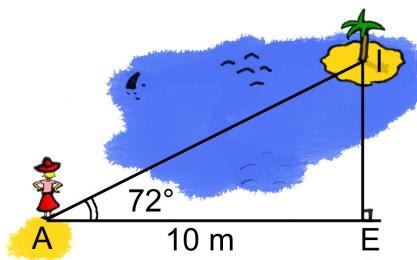
- Sophie, qui mesure 1,75 m, est à 30 m d'un arbre. L'angle entre l'horizontale et le sommet de l'arbre est de 35° .



- a. Donne l'arrondi au centième de la longueur AH.
- b. Déduis-en la hauteur de l'arbre.

24 Enchaînement de calculs

- Pour connaître la distance qui la sépare d'une île (I), Armelle vise un arbre de deux endroits distants de 10 m sur une berge. Elle a pris les mesures données sur le dessin suivant :



- a. Calcule la troncature à l'unité de la longueur AI.
- b. Déduis-en la troncature à l'unité de la longueur IE.

Sésamath

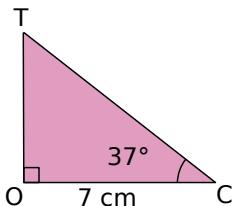
Exercices d'approfondissement



25 Calcul en deux temps

a. Calcule la longueur TC , arrondie au dixième.

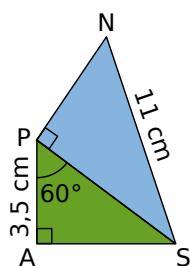
b. Déduis-en la longueur TO , arrondie au millimètre.



26 Avec deux triangles

a. Calcule la longueur PS .

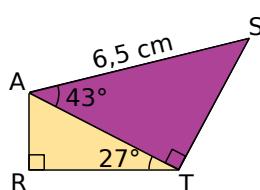
b. Déduis-en les mesures des angles \widehat{PSN} et \widehat{PNS} arrondies au degré.



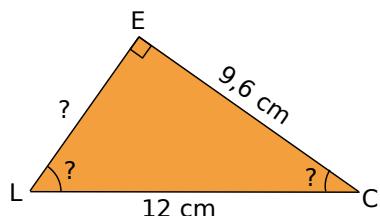
27 Avec deux triangles, bis

a. Calcule AT . Tu en donneras l'arrondi au millimètre.

b. Déduis-en la mesure de RT arrondie au millimètre.



28 Données manquantes



Calcule les mesures manquantes de la figure. Arrondis les mesures des angles au degré.

29 Dans un cercle

a. Trace un segment $[AB]$ qui mesure 8 cm. Construis le cercle (\mathcal{C}) de diamètre $[AB]$. Place un point N sur (\mathcal{C}) tel que $AN = 7 \text{ cm}$.

b. Montre que le triangle BAN est rectangle.

c. Calcule les mesures des angles \widehat{BAN} et \widehat{ABN} arrondies au degré.

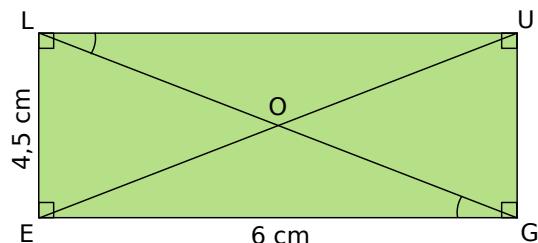
30 Avec Pythagore

a. Construis un triangle GAO tel que $GA = 10,5 \text{ cm}$; $OG = 8,4 \text{ cm}$ et $AO = 6,3 \text{ cm}$.

b. Quelle est la nature de GAO ? Justifie.

c. Calcule la mesure de l'angle \widehat{AGO} arrondie au degré.

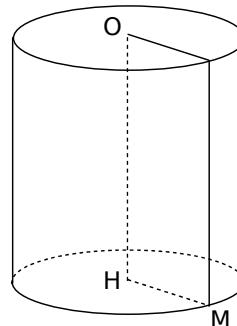
31 Dans un rectangle



Calcule les mesures des angles \widehat{LGE} et \widehat{GLU} . Tu arrondiras les résultats au degré.

32 Dans l'espace

On a représenté ci-dessous un cylindre de révolution de rayon de base $HM = 9 \text{ cm}$ et de hauteur $OH = 17 \text{ cm}$.



a. Que peux-tu dire du triangle OMH ? Pourquoi?

b. Calcule, en justifiant, la longueur OM .

c. Déduis des questions précédentes, la mesure de l'angle HOM . Tu donneras le résultat arrondi au degré.

33 Extrait du Brevet

a. Construire le triangle EFG tel que $EF = 12 \text{ cm}$, $EG = 5 \text{ cm}$ et $FG = 13 \text{ cm}$.

b. Prouver que le triangle EFG est rectangle en E .

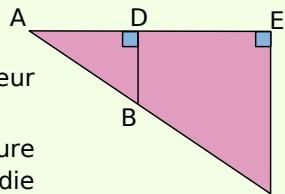
c. Calculer la mesure de l'angle \widehat{EFG} . Le résultat sera arrondi au degré.

d. Placer le point B sur le segment $[EF]$ tel que $EB = 7 \text{ cm}$. Tracer la droite passant par B et parallèle au côté $[FG]$. Elle coupe le côté $[EG]$ en M .

e. Calculer la valeur exacte de BM puis donner l'arrondi au millimètre.

34 Extrait du Brevet

Les points A, B et C sont alignés ainsi que les points A, D et E. Les droites (BD) et (CE) sont perpendiculaires à la droite (AE). On a $AB = 2,5 \text{ cm}$; $BD = 1,5 \text{ cm}$ et $CE = 4,5 \text{ cm}$.



- Calculer la longueur AD . Justifier.
- Déterminer la mesure de l'angle \widehat{BAD} arrondie au degré. Justifier.
- Calculer les longueurs AC et AE . Justifier.

35 Une course mythique

Lors d'une étape du Tour de France, les coureurs ont dû franchir le col du Tourmalet, situé à 2 115 m d'altitude. Le début de la montée commence à Sainte Marie de Campan à 857 m de haut. La distance parcourue par les cyclistes est alors de 17 km.



(On suppose que la route est en ligne droite.)

Calcule au degré près la mesure de l'angle \widehat{TSH} .

36 Influence du courant

Une personne traverse une rivière et est déportée par le courant d'un angle de 20° . Calcule la longueur L, arrondie au dixième, parcourue par ce nageur lorsqu'il traverse cette rivière large de 45 m. Tu feras un schéma pour représenter la situation.

(On suppose que les rives sont parallèles.)



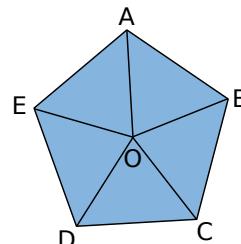
37 Pentagone régulier

On veut calculer le périmètre du pentagone régulier ci-dessous.

Ce polygone est constitué de cinq triangles isocèles tels que :

- $OA = OB = OC = OD = OE$;
- $AB = BC = CD = DE = EA$.

On sait aussi que $OA = 8 \text{ cm}$ et $\widehat{AOB} = 72^\circ$.

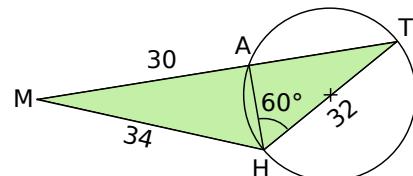


- Trace le triangle ABO sur une feuille blanche.
- Trace la bissectrice de l'angle \widehat{AOB} . Elle coupe [AB] en H. Quelle est la mesure des angles \widehat{AHO} et \widehat{AOH} ? Pourquoi?
- Explique pourquoi H est le milieu de [AB].
- Calcule la mesure de [OH] arrondie au centième.
- Déduis-en la mesure de [AH] arrondie au centième.
- À l'aide des résultats des questions c. et e., calcule le périmètre du pentagone au millimètre près.

38 Questions enchaînées

Les longueurs sont exprimées en cm.

Le triangle AHT est inscrit dans un cercle de diamètre [HT]. Les points M, A et T sont alignés.



- Quelle est la nature du triangle AHT ? Justifie ta réponse.
- Calcule la longueur AH.
- Quelle est la nature du triangle MAH ? Pourquoi ?
- Calcule la mesure de l'angle \widehat{AMH} arrondie au degré.
- Calcule la longueur AT arrondie au dixième, de deux manières différentes.



1 Méthode d'Ératosthène

1^{re} partie : Historique

Faites une recherche afin de déterminer qui était Ératosthène, quand et où il a vécu et pourquoi son nom est connu.

2^e partie : Diamètre de la Terre

Pour résoudre ce problème, vous pouvez essayer toutes les méthodes qui vous viennent à l'esprit. Vous écrirez au fur et à mesure les détails de vos recherches.

Problème :

Ératosthène a réussi à calculer une approximation du diamètre de la Terre.

Ci-dessous, des extraits d'un de ses manuscrits datant de 200 avant J.C. :

« Un jour dans l'année à Syène, le Soleil se reflète complètement dans l'eau d'un puits. Je peux donc considérer que les rayons du Soleil sont verticaux. »

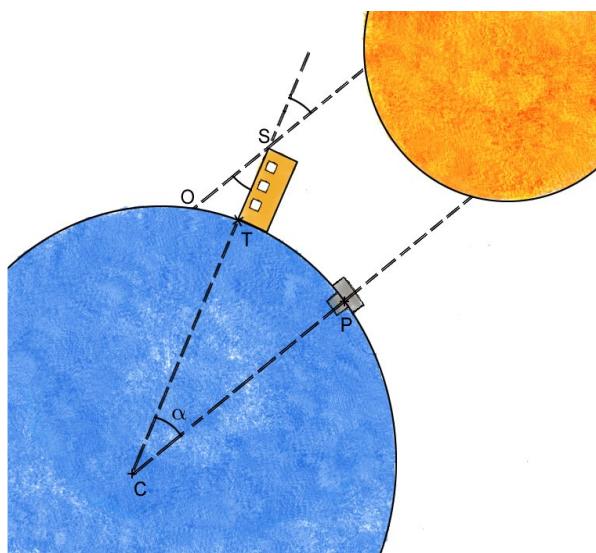
« Durant cette même journée à Alexandrie, un obélisque haut de 50 coudées fait une ombre horizontale de 6 coudées 1/3. »

« J'estime la distance entre Syène et Alexandrie à 5 000 stades. »

Voici un schéma de la Terre retrouvé dans un parchemin d'Ératosthène. On y voit un puits dans la ville de Syène et une obélisque dans la ville d'Alexandrie.

a. Calculez une approximation du diamètre de la Terre à partir de ces données, sachant qu'un stade mesure 157,5 mètres.

b. Faites des recherches sur la valeur exacte du diamètre de la Terre. Qu'en pensez-vous ?



2 Théodolite

1^{re} partie : Qu'est ce que c'est ?

Au CDI, recherchez la définition d'un théodolite.

À quoi sert-il ?

Dans quels domaines l'utilise-t-on ?

2^e partie : Construction

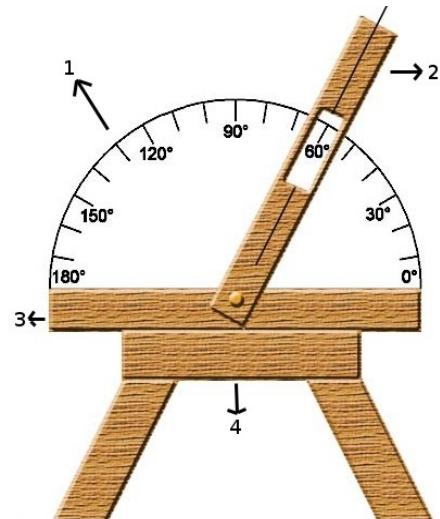
a. Construisez un théodolite à l'aide des quelques indications ci-dessous.

Matériel : carton, attaches parisienne, ciseaux, rapporteur, petit bâton de bois.

- La pièce 1 est un demi-cercle en carton sur lequel on colle une photocopie d'un rapporteur.

- La partie 2 est composée d'un morceau de carton avec une ouverture afin de lire l'angle exprimé en degré. Le trait correspond au viseur (utilisez le bâton en bois).

- Les parties 3 et 4 constituent la base et le trépied afin de pouvoir poser le théodolite à la verticale (la pièce 4 est optionnelle).



3^e partie : Utilisation

a. Sortez dans la cour de l'établissement.

- Placez votre théodolite sur un trépied. Il doit être à la fois parfaitement à la verticale (utilisez un fil à plomb) et à l'horizontale (utilisez un niveau à bulle).

- Mesurez la distance du théodolite au pied du bâtiment du collège. Mesurez la hauteur du théodolite par rapport au sol.

- À l'aide de votre instrument, mesurez l'angle formé entre l'horizontale et le haut du collège.

- Avec toutes ces données, calculez la hauteur du collège.

Se tester avec le QCM !

		R1	R2	R3	R4
1	[AB] est le côté adjacent à l'angle aigu \widehat{ABC} dans le triangle rectangle...				
2	PJE est rectangle en J donc...	$\cos \hat{E} = \frac{PJ}{PE}$	$PE^2 = PJ^2 + JE^2$	$\cos \hat{P} = \frac{PJ}{PE}$	$\cos \hat{J} = \frac{JP}{JE}$
3	$6 = \frac{x}{7}$ donc...	$x = \frac{7}{6}$	$6 \times x = 7$	$x = 6 \times 7$	$\frac{7}{x} = \frac{1}{6}$
4	$0,7 = \frac{5}{a}$ donc...	$\frac{a}{5} = \frac{10}{7}$	$a \times 0,7 = 5$	$a = \frac{5}{0,7}$	$a = 7,1$
5	Dans le triangle FGH rectangle en G, on a...	$\cos \hat{F} = \frac{FH}{FG}$	$FG = FH \times \cos \hat{F}$	$FH = HG \times \cos \hat{H}$	$FH = \frac{FG}{\cos \hat{F}}$
6		$\cos \hat{T} = \frac{TL}{TK}$	$\cos \hat{T} = \frac{TR}{TS}$	$\frac{TL}{TK} = \frac{TS}{TR}$	$\cos \widehat{LRK} = \frac{LR}{KR}$
7	Dans la figure précédente, $\hat{T} = 25^\circ$, $TK = 8 \text{ cm}$ et $SK = 1,5 \text{ cm}$ donc...	$LT \approx 7,25 \text{ cm}$	$LK = 8 \times 65^\circ$	$RT \times LT = 76$	$RL \approx 3,23 \text{ cm}$
8	EDF est un triangle rectangle en D tel que $EF = 2,6 \text{ cm}$ et $DF = 1 \text{ cm}$. On a alors...	$ED = 1 \text{ cm}$	$\widehat{DEF} = 110^\circ$	$\cos \hat{E} = \frac{12}{13}$	$\hat{F} \approx 67^\circ$
9		$\frac{OE}{OM} = \frac{OM}{OP}$	Si $ME = 4 \text{ cm}$ et $OE = 3 \text{ cm}$ alors $\widehat{OME} \approx 37^\circ$	Si $PM = 9 \text{ cm}$ et $PO = 4 \text{ cm}$ alors $\widehat{MPO} = 63^\circ$	Les cosinus de \widehat{POE} et \widehat{OME} sont égaux
10	Vrai ou faux ?	$\cos 60^\circ = 0,5$	$\cos 70^\circ$ est le double de $\cos 35^\circ$	$\cos 50^\circ$ est la somme de $\cos 20^\circ$ et de $\cos 30^\circ$	Le cosinus d'un angle peut être égal à 1,2

Pour aller plus loin

Formule

Avec ta calculatrice, calcule $(\cos 30^\circ)^2 + (\cos 60^\circ)^2$ puis $(\cos 20^\circ)^2 + (\cos 70^\circ)^2$. Quelle conjecture peux-tu faire ?

Démontre que cette conjecture est vraie.

Aide : travaille dans un triangle rectangle et utilise la définition du cosinus d'un angle aigu.



Pierre a fait un tremplin pour sauter avec son vélo : il a posé une planche sur un tonneau renversé. On donne $AP = 7 \text{ m}$ et $OP = 30 \text{ cm}$.

Quelle est la mesure de l'angle formé par la planche et le sol ?

