Outils pour la géométrie. Initiation à la démonstration

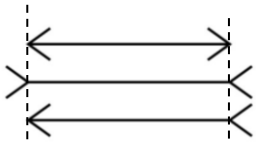
I) Définition d'une démonstration (ou preuve) en géométrie

• Une démonstration (ou preuve) en géométrie est un raisonnement logique, dont les seuls outils, nous permettant de passer de l'énoncé au résultat, sont : les définitions, les propriétés, les théorèmes, les formules… L'objectif est d'arriver à une conclusion incontestable.

•Nous faisons une démonstration lorsqu'il nous ait demandé de : « Prouver que … » ou « Justifier que … » ou « Expliquer pourquoi …» .

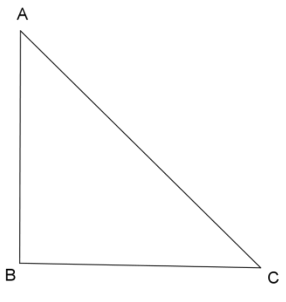
• Nous ne pouvons pas nous contenter de dire : « Mais je le vois sur la figure » car notre œil n'est pas assez précis et peu parfois nous tromper !!!!!

• Prenons par exemple ces trois figures ci-dessous :



C'est une célèbre illusion d'optique de F.C. Müller-Lyer. Les segments ont la même longueur sur les trois images et pourtant celui du haut semble avoir la plus petite longueur. Ceci est dû à l'orientation des flèches qui modifie notre perception des longueurs des segments.

• Prenons un autre exemple : en regardant la figure ci-dessous, le triangle vous parait-il rectangle ?



Nous avons l'impression qu'il est rectangle en B et pourtant il ne l'est pas : l'angle $\widehat{ABC}$ mesure exactement 91°.

L'objectif de la démonstration est d'expliquer notre résultat, en étant certain, de notre conclusion.

II) Méthode pour démontrer :

En géométrie les démonstrations se font en 3 étapes :

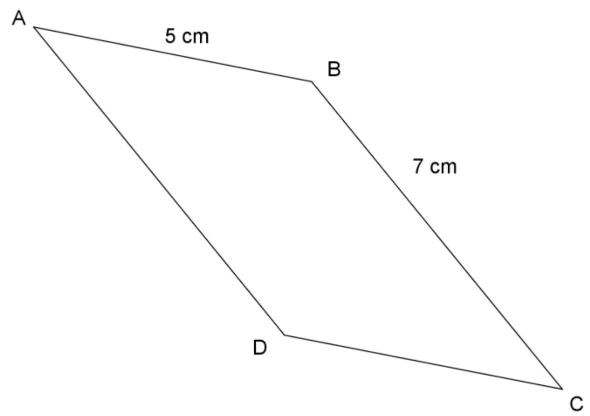
1ère étape → Repérer, dans l'énoncé, les **données utiles**.

2ème étape → On utilise **la propriété** qui permet de passer de l'énoncé à la conclusion

3ème étape → On écrit la **conclusion**

III) Exemple de démonstration à un pas

Exemple : ABCD est un parallélogramme. Prouver que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



1ère étape → Dans l'énoncé l'information utile est : **ABCD est un parallélogramme.** Les longueurs des côtés [AB] et [BC] ne sont utiles que pour tracer la figure.

2ème étape → La propriété qui permet de conclure est : **« Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles »**

3ème étape → Conclusion : **Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.**

Remarques :

● Dans la première étape, il est important de bien identifier la situation **en observant attentivement la figure ainsi que son codage** s'il y en a. Dans le cas contraire, faire une figure pour mieux repérer les informations utiles

● Comme nous l'avons déjà vu, , la deuxième étape doit faire le lien entre les données utiles et la conclusion. Il faut la formuler de façon **très rigoureuse** avec des termes précis ; comme par exemple : **« si … alors … » ,**
Lorsqu'il s'agit de faire appel à des théorèmes connus, , nous mentionnerons leurs noms, comme par exemple **: « Le théorème de Pythagore nous permet d'écrire… », « D'après le théorème de Thalès : … »** …

● comme nous l'avons déjà expliqué précédemment, dans une démonstration, nous ne pouvons pas dire : « je vois sur la figure que… » ou bien « j'ai vérifié avec mon compas (ou avec la règle) que … » car ce vocabulaire est du **domaine de l'observation.**

IV) Comment bien rédiger sa démonstration :

Reprenons l'exemple précédent :

Maintenant que nous avons identifié les trois étapes qui nous permettent de démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, nous allons rédiger correctement notre réponse :

• **On sait que** le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

• **Or,** les parallélogrammes ont les côtés opposés parallèles.

• **Donc :** les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

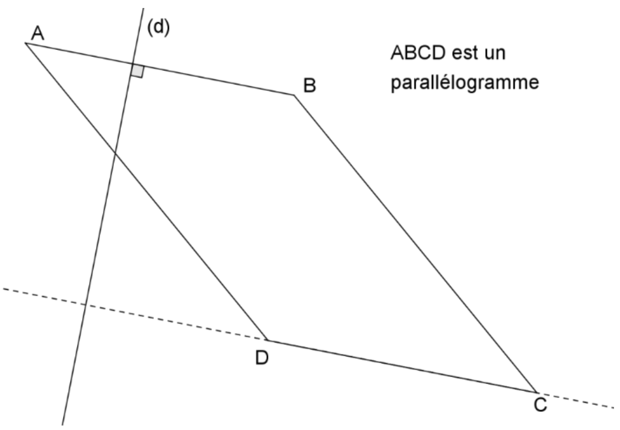
V) Propriétés importantes (rappel)

Angles	• Si deux droites, coupées par une sécante, sont parallèles alors elles forment des angles alternes internes de même mesure.
	• Si deux droites, coupées par une sécante, sont parallèles alors elles forment des angles correspondants de même mesure.
	• Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes internes de même mesure alors elles sont parallèles.
	• Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles correspondants de même mesure alors elles sont parallèles.
Triangles	• La somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 180°.
	• Les angles d'un triangle équilatéral ont tous la même mesure. Les trois angles d'un triangle équilatéral mesurent 60°.
	• Dans un triangle isocèle les deux angles à la base ont la même mesure.
Droites	• Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
	• Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
	• Si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.
Parallélogrammes Propriétés	• Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles.
	• Si un quadrilatère est un parallélogramme alors il a un centre de symétrie : le point d'intersection de ses diagonales.
	• Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu.
	• Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur.

Reconnaitre les parallélogrammes (propriétés réciproques)	**• Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles, alors c'est un parallélogramme.**
	• Si un quadrilatère a les côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
	• Si un quadrilatère a les diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

VI) Exemple de démonstration à deux pas

Exemple : Montrer que les droites (d) et (CD) sont perpendiculaires.



• **On sait que** ABCD est un parallélogramme,

Or un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles

Donc : (AB) et (CD) sont parallèles

1er pas avec une conclusion partielle

• **On sait** maintenant (puisque nous venons de le montrer) **que** les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que la droite (d) est perpendiculaire à la droite (AB) d'après le codage de la figure

Or, si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Donc : les droites (CD) et (d) sont perpendiculaires.

2ème pas