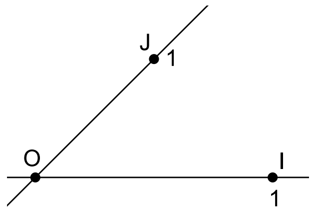
Géométrie dans un repère

1. Repères et coordonnées dans le plan

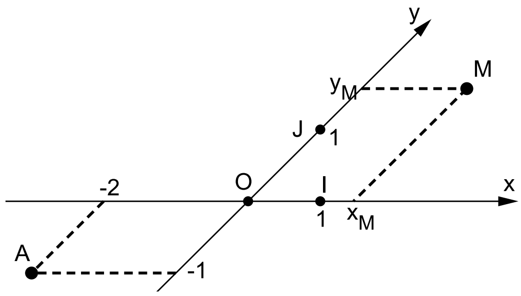
Définition. *Définir un repère du plan, c'est choisir trois points non alignés dans un ordre précis : O, I, J. On note ce repère $(O; I, J)$ et :*

- *le point O est l'origine du repère ;*
- *l'axe (OI) orientée de O vers I est l'axe des abscisses et la distance OI est l'unité de cet axe ;*
- *l'axe (OJ) orientée de O vers J est l'axe des ordonnées et la distance OJ est l'unité de cet axe.*



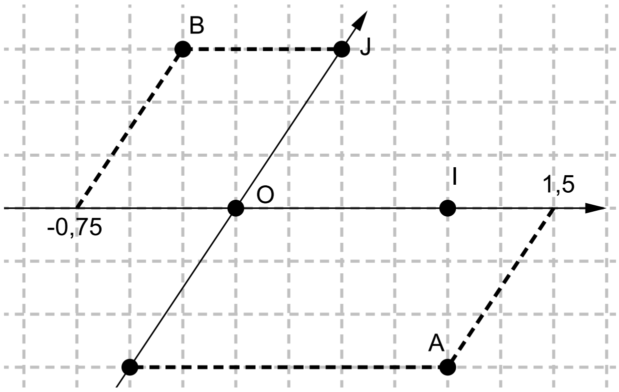
Définition. *On considère un repère $(O; I, J)$ du plan et un point M quelconque.*

- *En traçant la parallèle à (OJ) passant par M on obtient sur l'axe (OI) l'<u>abscisse</u> x_M du point M.*
- *En traçant la parallèle à (OI) passant par M on obtient sur l'axe (OJ) l'<u>ordonnée</u> y_M du point M.*
- *Le couple de réels $(x_M; y_M)$ est le couple des <u>coordonnées</u> du point M dans le repère $(O; I, J)$.*



<u>Exemple</u>

Dans le repère $(O; I, J)$ ci-dessous, on a $A(1{,}5; -1)$ et $B(-0{,}75; 1)$.



Remarques.

1. Les points de coordonnées $(x; y)$ et $(x'; y')$ sont confondus si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.
2. Dans un repère $(O; I, J)$, on a toujours $O(0; 0)$, $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$.

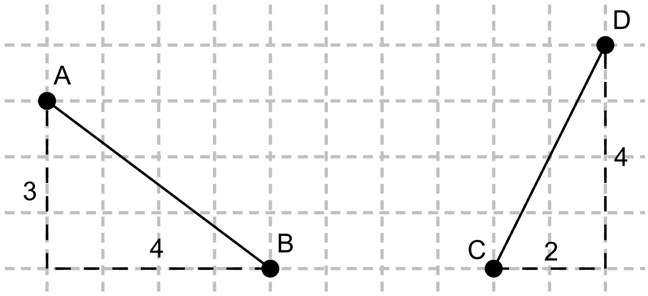
Définition. *Soit $(O; I, J)$ un repère.*

- *Si le triangle OIJ est rectangle en O, on dit que $(O; I, J)$ est un repère orthogonal.*
- *Si le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O, on dit que $(O; I, J)$ est un repère orthonormal ou orthonormé. Les axes du repère sont perpendiculaires et l'unité est la même sur les deux axes.*

2. Distance en repère orthonormé

Exercice

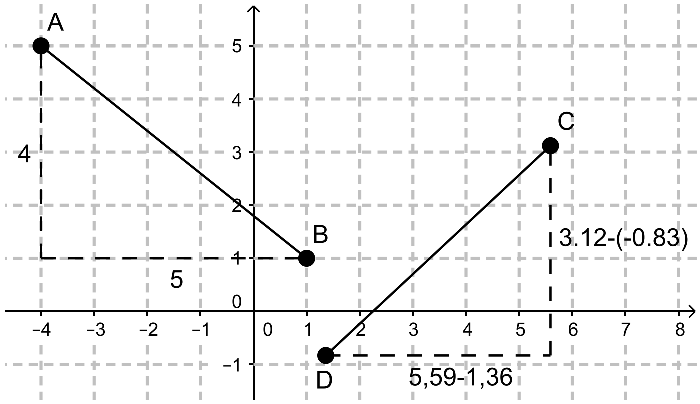
Le quadrillage ci-dessous est constitué de carrés. Calculer les distances AB et CD.



Le segment $[AB]$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés mesurent 4 et 3. D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, d'où $AB = \sqrt{25} = 5$.
De même $CD = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$.

Exercice

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-4; 5)$, $B(1; 1)$, $C(5{,}59; 3{,}12)$ et $D(1{,}36; -0{,}83)$. Calculer les distances AB et CD.



Une fois les points placés, il faut calculer les côtés des triangles rectangles. Pour AB c'est facile, on a $AB = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$.
Pour CD, le côte « horizontal » mesure $5{,}59 - 1{,}36 = 4{,}23$ et le côté « vertical » mesure $3{,}12 - (-0{,}83) = 3{,}95$. Ainsi

$$CD = \sqrt{4{,}23^2 + 3{,}95^2} = \sqrt{33{,}4954} \approx 5{,}79.$$

Plus généralement, on a donc le résultat suivant.

Théorème. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points.
La distance entre les points A et B est

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

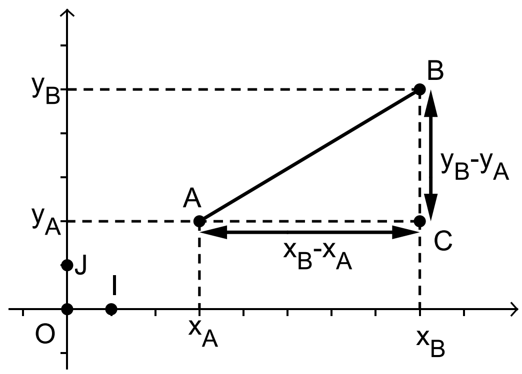
Attention. Ce théorème ne s'applique que dans un repère orthonormé !

Remarque. Dans la formule ci-dessus $(x_B - x_A)^2$ peut être remplacé par $(x_A - x_B)^2$ car les nombres $x_B - x_A$ et $x_A - x_B$ sont opposés et ont par conséquent le même carré. La même remarque est valable pour $y_B - y_A$. Heureusement d'ailleurs puisque $AB = BA$.

Démonstration. On considère le point $C(x_B; y_A)$. On suppose $x_B \neq x_A$ et $y_B \neq y_A$.
Les axes du repère étant perpendiculaires, le triangle ABC est rectangle en C. Par le théorème de Pythagore, on a donc $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
Or $AC = x_B - x_A$ ou $AC = x_B - x_A$ selon que $x_A < x_B$ ou $x_A - x_B$. Dans tous les cas on a $AC^2 = (x_B - x_A)^2$. De même $BC^2 = (y_B - y_A)^2$.
On en déduit donc

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2,$$

D'où le résultat en prenant la racine carrée puisque $AB > 0$.
On vérifie que la formule reste vraie si $x_B = x_A$ ou $y_B = y_A$. ■

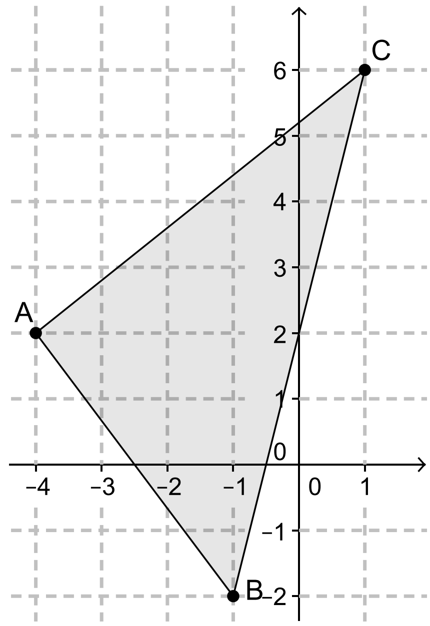


Exemple A

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-4; 2)$, $B(-1; -2)$ et $C(1; 6)$. Le triangle ABC est-il rectangle ?
On a

- $AB = \sqrt{\left(-1-(-4)\right)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$;
- $AC = \sqrt{\left(1-(-4)\right)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$;
- $BC = \sqrt{\left(1-(-1)\right)^2 + \left(6-(-2)\right)^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$.

Le côté le plus long est $[BC]$, donc si ABC est rectangle, $[BC]$ est son hypoténuse. Or $AB^2 + AC^2 = 41 + 25 = 66$ et $BC^2 = 68$, donc $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ et d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.



Exemple

Soit $A(0; 4), B(6; 2)$ et $C(-2; 0)$. Calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC ainsi que le rayon R de ce cercle.

Réponse. On rappelle que le centre du cercle circonscrit est l'intersection des médiatrices des côtés.
On va déterminer une condition portant sur les coordonnées $(x; y)$ d'un point pour que celui appartiennent à la médiatrice Δ_C de $[AB]$. On a

$$M(x; y) \in \Delta_C \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2.$$

Or

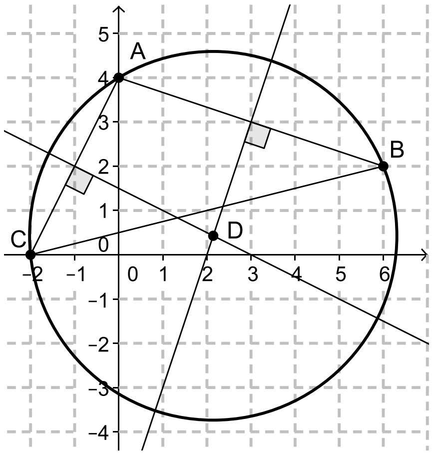
$$AM^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16$$

et

$$BM^2 = (x-6)^2 + (y-2)^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4y + 4$$

donc

$$\begin{aligned} & AM^2 = BM^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 - 8y + 16 \\ & \quad = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 \\ \Leftrightarrow\ & -8y + 4y = -12x + 36 + 4 - 16 \\ \Leftrightarrow\ & -4y = -12x + 24 \\ \Leftrightarrow\ & y = 3x - 6. \end{aligned}$$



Cela signifie qu'un point de coordonnées $(x;y)$ appartient à Δ_C à condition que x et y vérifient l'équation $y = 3x - 6$.

Déterminons de même la condition pour la médiatrice Δ_B de $[AC]$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in \Delta_B \quad \Leftrightarrow\ & AM^2 = CM^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x-0)^2 + (y-4)^2 = (x+2)^2 + (y-0)^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 4x + 4 + y^2 \\ \Leftrightarrow\ & -8y = 4x + 4 - 16 \\ \Leftrightarrow\ & y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Le point $D(x_D, y_D)$, intersection de Δ_C et Δ_B, vérifie les deux conditions puisqu'il est sur chacune des médiatrices. Ainsi x_D est solution de l'équation

$$3x - 6 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(3x-6) = -x + 3 \Leftrightarrow 6x - 12 = -x + 3 \Leftrightarrow 7x = 15,$$

donc $x_D = \frac{15}{7}$, puis $y_D = 3 \times \frac{15}{7} - 6 = \frac{3}{7}$. Ainsi $D\left(\frac{15}{7}; \frac{3}{7}\right)$.

Puisque $R = AD = BD = CD$, il en résulte que R^2 est égal à

$$AD^2 = \left(\frac{15}{7} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{7} - 4\right)^2 = \left(\frac{15}{7}\right)^2 + \left(-\frac{25}{7}\right)^2 = \frac{5^2 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 5^2}{7^2} = \frac{5^2 \cdot 34}{7^2}$$

D'où $R = \frac{5}{7}\sqrt{34}$.

3. Coordonnées du milieu d'un segment

Théorème. On se place dans le plan muni d'un repère quelconque $(O; I, J)$. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points.
Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Remarque. On pourra retenir simplement que les coordonnées du milieu d'un segment sont les moyennes des coordonnées des extrémités de ce segment. On remarque que la formule est symétrique en A et B, ce qui est normal puisque les segments $[AB]$ et $[BA]$ sont les mêmes.

Démonstration. Elle sera faite dans le chapitre sur les vecteurs. ■

Exemple A

On considère les points A, B, C de l'exemple A.

1) Calculer les coordonnées du milieu I de $[AC]$.
2) Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

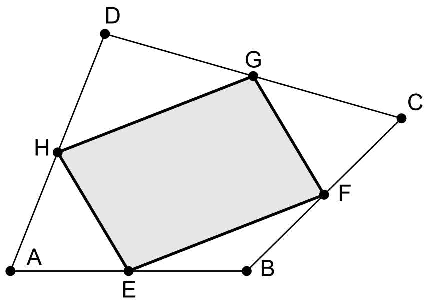
Réponse.

1) Les coordonnées de I sont $\left(\frac{-4+1}{2};\frac{2+6}{2}\right)$, donc $I\left(-\frac{3}{2};4\right)$.
2) Le point D est le symétrique de B par rapport à I, autrement D est tel que I soit le milieu de $[BD]$. En appelant $(x;y)$ les coordonnées de D, cela se traduit par
$$\frac{x_B+x_D}{2}=x_I \text{ et } \frac{y_B+y_D}{2}=y_I.$$

On en déduit $x_D=2x_I-x_B=2\times\left(-\frac{3}{2}\right)-(-1)=-2$ et $y_D=2y_I-y_B=2\times 4-(-2)=10$. Donc $D(-2;10)$.

Exemple (De l'importance de bien choisir le repère)

On considère un quadrilatère quelconque $ABCD$ et les milieux respectifs E, F, G et H de ses côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
Démontrer que le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.



Réponse. On considère le repère $(A;B,C)$. On a donc $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $D(0;1)$. Pour les coordonnées de C on n'a guère le choix : on les notes $(a;b)$.
Les points E, F, G et H ont pour coordonnées
$$E\left(\frac{1}{2};0\right),\ F\left(\frac{1+a}{2};\frac{b}{2}\right),\ G\left(\frac{a}{2};\frac{1+b}{2}\right),\ H\left(0;\frac{1}{2}\right).$$
Les coordonnées du milieu du segment $[EG]$ sont donc
$$\frac{x_E+x_G}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)=\frac{1+a}{4} \text{ et } \frac{y_E+y_G}{2}=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1+b}{2}\right)=\frac{1+b}{2}.$$
Celles du milieu de $[HF]$ sont
$$\frac{x_H+x_F}{2}=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1+a}{2}\right)=\frac{1+a}{4} \quad et \quad \frac{y_H+y_F}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{2}\right)=\frac{1+b}{4}.$$
Ainsi les segments $[EG]$ et $[HF]$ ont même milieu et par conséquent $EFGH$ est un parallélogramme.