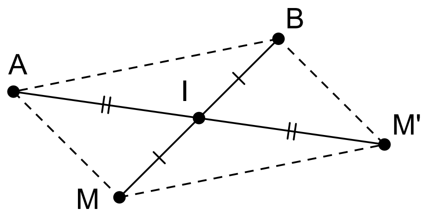
Vecteurs

1. Translations et vecteurs

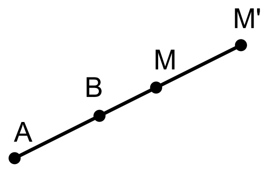
❖ Translation et vecteurs

Définition. *On se donne deux points A et B du plan.*
À tout point M, on associe l'unique point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme.
Cette transformation est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

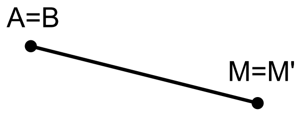
Il y a trois situations possibles.



$M \notin (AB)$



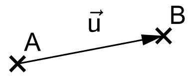
$M \in (AB)$



$A = B$

Si $A \neq B$, on représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une flèche d'origine A et d'extrémité B.
Visuellement, ce vecteur donne l'idée d'un déplacement : il indique

- la direction (celle de la droite (AB)) ;
- le sens (de A vers B) ;
- la longueur AB.



Si l'on ne porte pas d'attention à une origine ou une extrémité particulière, le vecteur peut être désigné par une seule lettre, par exemple $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$.

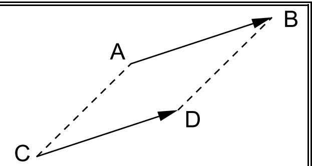
Attention. Un vecteur n'est pas un ensemble de points. C'est un objet abstrait qui caractérise une translation et qu'il est commode de représenter par une flèche.

❖ Vecteurs égaux

Définition. *Deux vecteurs sont égaux s'ils sont associés à la même translation.*

Visuellement, deux vecteurs sont égaux s'ils donnent l'idée du « même déplacement ».

Théorème. Soit A, B, C, D quatre points. Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.



Exemple

Soit $ABDC$ et $CDFE$ deux parallélogrammes. Montrer que $ABFE$ est également un parallélogramme.

Réponse. $ABDC$ et $CDFE$ sont des parallélogrammes se traduit par les égalités de vecteurs $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$. Il en résulte que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ et que $ABFE$ est un parallélogramme.

❖ Caractérisation vectorielle des parallélogrammes

Théorème. Si $ABCD$ est un parallélogramme alors on a les quatre égalités suivantes

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}.$$

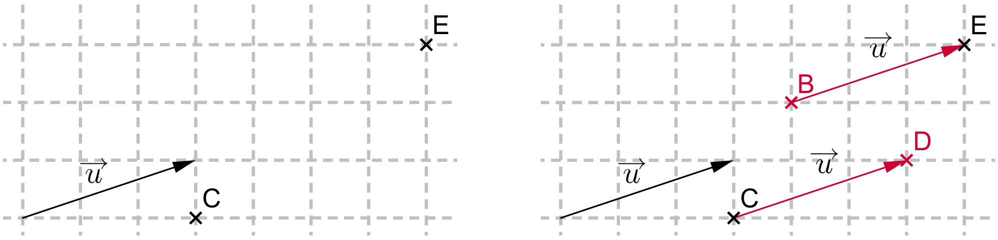
Réciproquement, si on a l'une des égalités précédentes, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

❖ Représentant

Définition. *Soit $\vec{u}$ un vecteur et A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine A et d'extrémité B.*

Exemple

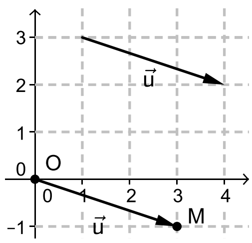
Construire le représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine C et celui d'extrémité E.



Définition. *Par la translation qui transforme A en A, tout point est sa propre image. Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul et est noté $\vec{0}$.*

2. Coordonnées d'un vecteur

Soit $(O; I, J)$ un repère du plan.



Définition. *Soit $\vec{u}$ un vecteur et M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point M. Si les coordonnées de M sont $(x; y)$ on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.*

Remarque. Les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ correspondent au déplacement effectué sur le quadrillage : x sur l'axe des abscisses et y sur l'axe des ordonnées. Sur le graphique ci-dessus, on a $M(3; -1)$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ce qui traduit que pour aller de l'origine à l'extrémité du vecteur il faut avancer de 3 carreaux et descendre de un carreau.

Théorème. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}.$$

Démonstration. Soit M et N les points tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$. Donc $M(x; y)$ et $N(x'; y')$. On a

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow [OM] \text{ et } [ON] \text{ ont le même milieu.}$$

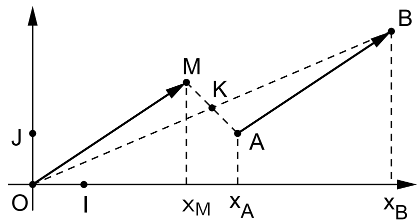
Or les coordonnées du milieu de $[OM]$ sont $\left(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}\right)$ et celle du milieu de $[ON]$ sont $\left(\frac{x'}{2}; \frac{y'}{2}\right)$, donc $[OM]$ et $[ON]$ ont le même milieu $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{x'}{2} \\ \frac{y}{2} = \frac{y'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ ■

Théorème. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Démonstration. Notons M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $(x_M; y_M)$ les coordonnées de M. Puisque $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ les segments $[OB]$ et $[AM]$ ont le même milieu K. Donc

$$\frac{x_O + x_B}{2} = \frac{x_A + x_M}{2} \text{ et } \frac{y_O + y_B}{2} = \frac{y_A + y_M}{2}$$

c'est-à-dire $x_M = x_B - x_A$ et $y_M = y_B - y_A$.
Or, par définition, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont celles de M. ■



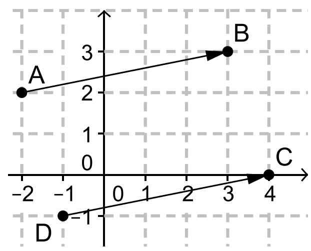
Exemple

Soit $A(-2; 2)$, $B(3; 3)$, $C(4; 0)$ et $D(-1; -1)$. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Réponse. Il suffit de prouver que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (attention à l'ordre des points). Or

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 - (-2) \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4 - (-1) \\ 0 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où l'égalité des vecteurs.



Définition. *La* <u>*norme*</u> *(ou* <u>*longueur*</u>*) d'un vecteur* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *est le réel noté* $\|\vec{u}\|$ *défini par* $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur et $\overrightarrow{AB}$ l'un de ses représentants. Appelons $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ les coordonnées de A et B. Alors $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB.$$

En particulier pour tous points A et B, $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Définition. *Le* <u>*déterminant*</u> *de deux vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *le réel noté* $\det(\vec{u}; \vec{v})$ *défini par* $xy' - x'y$.

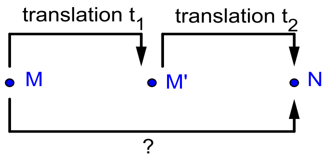
Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Alors $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 5 \times (-2) - 2 \times (-8) = 6$.

3. Somme de deux vecteurs

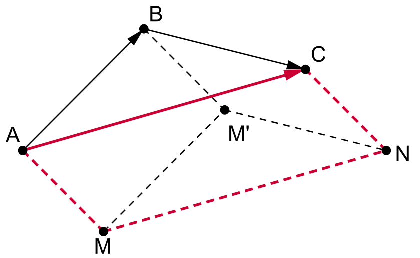
Théorème. L'enchaînement de deux translations est encore une translation.

Démonstration. Soit t_1 la translation de vecteur $\vec{u}$ et t_2 la translation de vecteur $\vec{v}$. Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$ et C le point tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.



Donnons-nous un point M du plan et déterminons son image par l'application successive de ces deux translations.

Soit M' l'image de M par t_1 et N l'image de M' par t_2. Les quadrilatères $ABM'M$ et $BCNM'$ sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM'}$ et $\overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{CN}$, d'où $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CN}$ ce qui démontre que $ACNM$ est un parallélogramme, donc que N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Ainsi, l'enchaînement de deux translations est encore une translation. ■
Ce théorème conduit à la définition suivante.



Définition. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur associé à la translation égale à l'enchaînement des deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note $\vec{u} + \vec{v}$.*

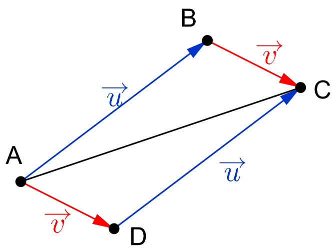
Théorème (relation de Chasles). Pour tous points A, B et C on
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Démonstration. Cela résulte de la démonstration du théorème : on a vu que l'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec celle de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, ce qui s'écrit par définition d'un vecteur somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. ■

Remarque. Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

Théorème (commutativité de l'addition de vecteurs). Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

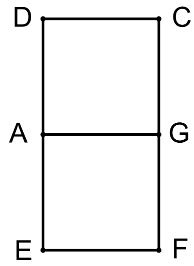
Démonstration. Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$, C le point tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ et D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$.
Puisque $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{u}$. Par conséquent en utilisant à deux reprises la relation de Chasles on a
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{v} + \vec{u}. \ ■$$



Définition. *Soit $\vec{u}$ un vecteur de représentant $\overrightarrow{AB}$. On appelle opposé du vecteur $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{BA}$. On le note $-\vec{u}$. L'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$, ce qui s'écrit $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.*
La différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ égal à $\vec{u} + (-\vec{v})$.

Exemple

$ADCG$ et $AGFE$ sont deux carrés. Déterminer



a. $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}$ **b.** $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DG}$ **c.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{EF}$

d. $\overrightarrow{EG}-\overrightarrow{AD}$ **e.** $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{CA}$ **f.** $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CF}$

Réponse. On essaie de remplacer un ou deux des vecteurs de la somme par des vecteurs qui leur sont égaux dans le but d'appliquer la relation de Chasles.

a. Par la relation de Chasles $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{DG}$.

b. Puisque $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AF}$, la relation Chasles permet d'écrire $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DF}$.

c. Comme $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AG}$, on a $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{CG}$.

d. Par définition d'une différence de vecteur, $\overrightarrow{EG}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{DA}$. On a $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CG}$, donc $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$.

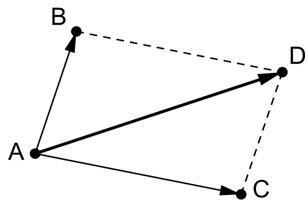
e. Comme $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$, il vient $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

f. Puisque $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CF}$, la différence $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FC}$ est égale à $\vec{0}$.

Théorème (règle du parallélogramme). Soit A, B, C, D quatre points. Alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

Démonstration. On raisonne par équivalence :

$ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ (on ajoute $\overrightarrow{AB}$ à chaque membre)
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ (relation de Chasles) ■

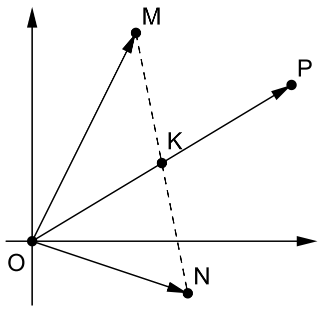


Théorème. Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Démonstration. Soit M,N et P les points tels que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$, $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OP}=\vec{u}+\vec{v}$. On a donc $M(x;y)$ et $N(x';y')$ et les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont celles du point P.

D'après la règle du parallélogramme, $OMPN$ est un parallélogramme, donc ses diagonales se coupent en leur milieu K.

Comme K est le milieu de $[MN]$, on a $K\left(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2}\right)$. D'autre part K est le milieu de $[OP]$ donc $K\left(\frac{x_P}{2};\frac{y_P}{2}\right)$. On en déduit donc $\frac{x_P}{2}=\frac{x+x'}{2}$ et $\frac{y_P}{2}=\frac{y+y'}{2}$ d'où $x_P=x+x'$ et $y_P=y+y'$. ■



Exemple

Soit $A(-1;2)$, $B(-3;-1)$ et $C(3;1)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D défini par $\overrightarrow{AD}=\vec{u}$.
3. Démontrer que $ABDC$ est un parallélogramme.

Réponse.

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-(-1)\\-1-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-(-1)\\3-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ donc

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-2+4\\-3+(-1)\end{pmatrix}=\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}.$$

2. Soit $D(x_D;y_D)$. D'une part $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x_D-(-1)\\y_D-2\end{pmatrix}$ et d'autre part $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$. On a donc

$$\begin{cases}x_D+1=2\\y_D-2=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=1\\y_D=-2\end{cases}$$

et on conclut que $D(1;-2)$.

3. D'après la règle du parallélogramme, l'égalité $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ est équivalente au fait que $ABDC$ est un parallélogramme.

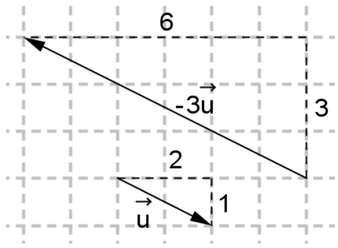
On peut conclure en calculant $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1-3\\-2-1\end{pmatrix}=\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et en invoquant le fait que l'égalité $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ prouve bien que $ABDC$ est un parallélogramme.

4. Produit d'un vecteur par un réel

Définition. *Soit k un nombre réel et $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur. On définit le vecteur $k\vec{u}$ par $\vec{v}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.*

Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, alors $-3\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$.

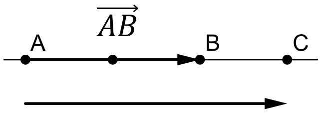


On admet que le vecteur $k\vec{u}$ ainsi défini ne dépend pas du repère choisi.

❖ **Construction géométrique du vecteur $k\overrightarrow{AB}$**

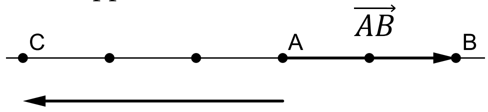
Soit A et B deux points et k un réel.
Si $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ou $k=0$, le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul.
Sinon le point C tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ est l'unique point de (AB) tel que

- Si $k>0$, $AC=kAB$ et $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens.



$$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

- Si $k<0$, $AC=-kAB$ et $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens opposé.



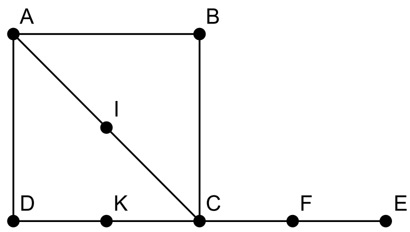
$$\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

Exemple A

$ABCD$ est un carré, I est le milieu de $[AC]$, les points D,K,C,F,E sont alignés dans cet ordre avec $DK=KC=CF=FE$. On a les égalités suivantes.

1. $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{FE}=-2\overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$

2. $\overrightarrow{DF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$



3. $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{EK}$
4. $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$
5. $\overrightarrow{DF} = -3\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{ED}$

❖ **Propriétés de calculs**

Théorème. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et k et k' deux réels.
1. $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$;
2. $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$;
3. $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.

Démonstration. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
Le vecteur $k(\vec{u}+\vec{v})$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} k(x+x') \\ k(y+y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx+kx' \\ ky+ky' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix}.$$

On reconnaît la somme des coordonnées des vecteurs $k\vec{u}$ et $k\vec{u}$, d'où l'égalité 1).
On procède de même pour les égalités **2.** et **3.** ■

Exemple

- $3\left(\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{EF}\right) = 3\overrightarrow{AB} + 3\left(-\frac{4}{3}\overrightarrow{EF}\right) = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{EF}$
- $3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AB} = (3-5)\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$

5. Vecteurs colinéaires

Définition. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.*
En particulier $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur puisque $0\vec{u} = k\vec{0} = \vec{0}$ pour tout $\vec{u}$ et k.

Exemple A

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires, mais $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne le sont pas.

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$ ou tel que $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ autrement dit si leurs coordonnées sont proportionnelles. Le tableau suivant constitué de leurs coordonnées doit donc être un tableau de proportionnalité.

x	x'
y	y'

Cela se traduit finalement par $xy' = x'y$, d'où le théorème suivant.

Théorème. Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.

Démonstration. L'égalité $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ s'écrit $xy' - x'y = 0$ ou encore $xy' = x'y$.
1. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et l'égalité $xy' = x'y$ est bien satisfaite car elle se réduit à $0 = 0$.
2. On suppose dans la suite $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires. Il existe $k \neq 0$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ce qui donne aux niveaux des coordonnées les égalités $x = kx'$ et $y = ky'$. En multipliant la première égalité par y' puis en utilisant la seconde, il vient $xy' = kx'y' = x' \times (ky') = x'y$.
Réciproquement, supposons $xy' = x'y$. Deux cas sont à envisager.

- Si $y' = 0$, alors $x'y = 0$ et comme $x' \neq 0$ (sinon on aurait $\vec{v} = \vec{0}$), on a $y = 0$. Il en résulte que $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $\vec{u} = \frac{x}{x'}\vec{v}$, ce qui montre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Si $y' \neq 0$, on peut écrire $x = \frac{x'}{y'}y$, donc en posant $k = \frac{x'}{y'}$ on obtient les égalités $x = ky$ et $x' = ky'$. Cela montre l'égalité $\vec{u} = k\vec{v}$ et la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. ■

Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $\det(\vec{u};\vec{v}) = 4 \times 1 - (-2) \times (-2) = 0$. Remarquons que $\vec{u} = -2\vec{v}$. En revanche $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires car $-2 \times (-3) - 2 \times 1 \neq 0$.

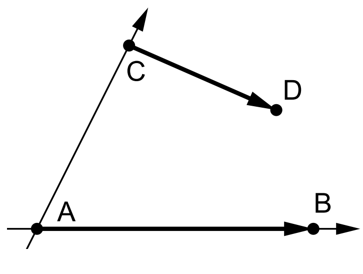
6. Applications

Théorème. Soit A, B, C, D quatre points avec $A \neq B$ et $C \neq D$. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Démonstration. Si les quatre points sont alignés, il n'y a rien à démontrer.
Sinon parmi les quatre points il y en a au moins trois non alignés, par exemple A, B, C. Comme $A \neq B$ et que C n'est pas aligné avec ces points, on peut considérer le repère $(A; B, C)$. Dans ce repère, on a $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$ et appelons (x_D, y_D) les coordonnées de D.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement C et D ont la même ordonnée, c'est-à-dire si et seulement si $y_D = 1$.
D'autre part $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D \\ y_D - 1 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si

$$1 \times (y_D - 1) - 0 \times x_D = 0$$

soit $y_D = 1$. On retrouve la même condition que celle qui traduit le parallélisme de (AB) et (CD), ce qui établit l'équivalence. ■



On énonce « deux vecteurs sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction ».

Théorème. Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Démonstration. Si deux de ces points sont confondus, l'équivalence est claire puisqu'alors l'un des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AC}$ est nul et le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Supposons maintenant que A, B, C sont deux à deux distincts. D'après le théorème précédent, les droites (AB) et (AC) sont parallèles, mais comme A est commun, ces deux droites sont confondues, ceci revient bien à dire que A, B, C sont alignés. ■

Exemple

Dans un repère, on considère les points $A(-1;-1)$, $B(2;8)$, $C(-2;-4)$, $D(3;3)$ et $E(9;21)$.

1. Montrer que les points A, B et C sont alignés.
2. Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?

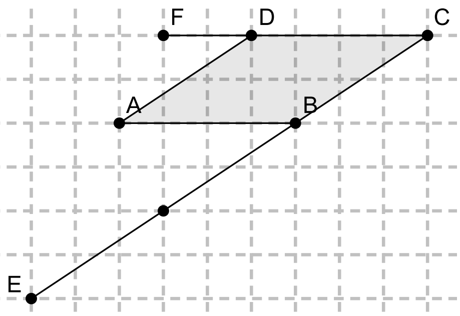
Réponse.

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$. On remarque $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires qui prouve que les points A, B et C sont alignés.
2. Comme $\overrightarrow{DE}\binom{6}{18}$, on constate que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AB}$, ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Exemple

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$.

Donner l'expression des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, E et F sont alignés.



Réponse. On utilise la relation de Chasles pour faire apparaître les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

et en remarquant que $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ on a

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Ainsi $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AF}$, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires, donc les points A, E et F sont alignés.

Théorème (caractérisation du milieu d'un segment). Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) I est le milieu du segment $[AB]$;

(ii) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$;

(iii) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$;

(iv) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Démonstration.

1. Démontrons $(i) \Leftrightarrow (ii)$. On a successivement

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} &\Leftrightarrow AIBI \text{ est un parallélogramme}\\ &\Leftrightarrow [AB] \text{ et } [II] \text{ se coupent en leur milieu}\\ &\Leftrightarrow I \text{ est le milieu de } [AB].\end{aligned}$$

2. Il est immédiat que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, d'où $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.

3. Pour $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ on obtient grâce à la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

ce qui est bien le résultat attendu. ■

Théorème. Soit I le milieu d'un segment $[AB]$. Pour tout point M on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Démonstration. En faisant apparaître le point I dans $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} \\ &= 2\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}} = 2\overrightarrow{MI}. \end{aligned}$$ ■