Ensemble de points

Voir le corrigé

A et B sont deux points distincts.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 16$ sachant que $AB = 4$

3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 10$ sachant que $AB = 5$

4. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 15$ sachant que $AB = 5$

Voir le texte de l'exercice

1. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0 \Longleftrightarrow (AM)\perp(AB)$ ou $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{0}$ donc M appartient à la droite perpendiculaire à (AB) passant par A.

2. Rappel : Théorème de la médiane

   Dans le triangle ABM, si I est le milieu de $[AB]$, on a :

   $MA^2+MB^2=2MI^2+2AI^2$

   Soit I le milieu de $[AB]$, on a alors $AI=\dfrac{AB}{2}=2$

   $MA^2+MB^2=16$

   $\Longleftrightarrow 2MI^2+2AI^2=16$

   $\Longleftrightarrow 2MI^2+8=16$

   $\Longleftrightarrow 2MI^2=8$

   $\Longleftrightarrow MI^2=4$

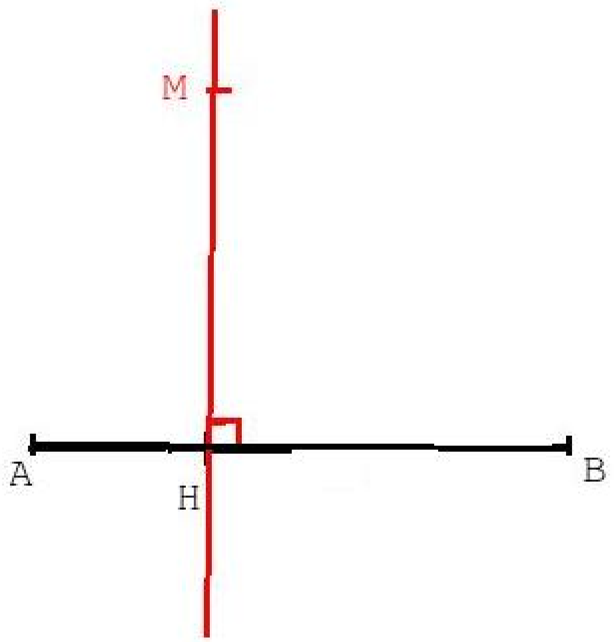
   $\Longleftrightarrow MI=2$

   donc M appartient au cercle de centre I et rayon 2.

3. Soit H le point de $[AB]$ tel que $AH=2$ et M un point de la droite (d) perpendiculaire à (AB) passant par H,

   $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=AH\times AB=2\times 5=10$

   L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=10$ est la droite (d) perpendiculaire à (AB) passant par H.



4. $MA^2-MB^2=15$

   $\Longleftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=15$

   $\Longleftrightarrow (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})=15$

   $\Longleftrightarrow (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM})=15$

   $\Longleftrightarrow (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{BA})=15$

$\iff (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{BA})=15$

$\iff (2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{BA})=15$

$\iff 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}=15$

$\iff 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}=15$

$\iff 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BA}^2=15$

$\iff 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA}-25=15$

$\iff \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA}=20$

$\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=20$

Soit Hle point de $[AB]$ tel que $AH=4$ et et M un point de la droite (d) perpendiculaire à (AB) passant par H,

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=AH\times AB=20$

L'ensemble des points M tels que $MA^2-MB^2=15$ est la droite (d) perpendiculaire à (AB) passant par H.