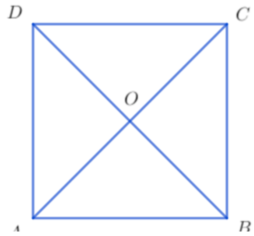
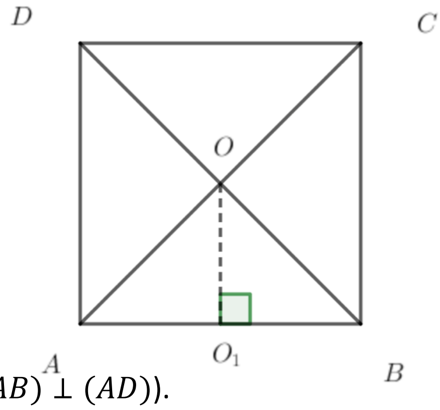
CORRIGÉ DES EXERCICES – PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1 : on considère le carré $ABCD$ de centre O et de côté 8.
Calculer les produits scalaires suivants :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ d) $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{OD}$ e) $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{DO}$
On pourra rajouter des projetés orthogonaux sur le dessin pour s'aider.



Corrigé :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO_1}$ avec O_1 projeté orthogonal de O sur (AB).
$= 8 \times 4 = 32$ ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AO_1}$ sont colinéaires de même sens).



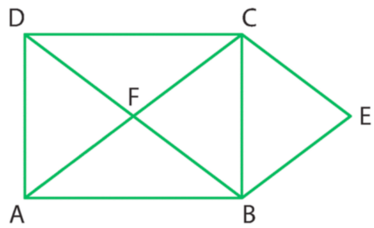
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA}$ car A est le projeté orthogonal de D sur (AB).
$= \overrightarrow{AB}.\vec{0} = 0$ (en effet, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux donc $(AB) \perp (AD)$).

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 8 \times (-8) = -64$ ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires de sens contraire).

d) $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{OD} = BO \times OD = BO \times BO = BO^2$ car $\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires de même sens.
Or, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABD rectangle en A, on a :
$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 8^2 + 8^2 = 64 + 64 = 128$
donc $BD = \sqrt{128} = \sqrt{64 \times 2} = \sqrt{64}\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ d'où $BO = OD = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$
Ainsi : $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{OD} = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 16 \times 2 = 32$

e) $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{DO} = -OB \times OD$car $\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires de sens contraire.
$= -OB \times OB = -OB^2 = -\left(4\sqrt{2}\right)^2 = -32$

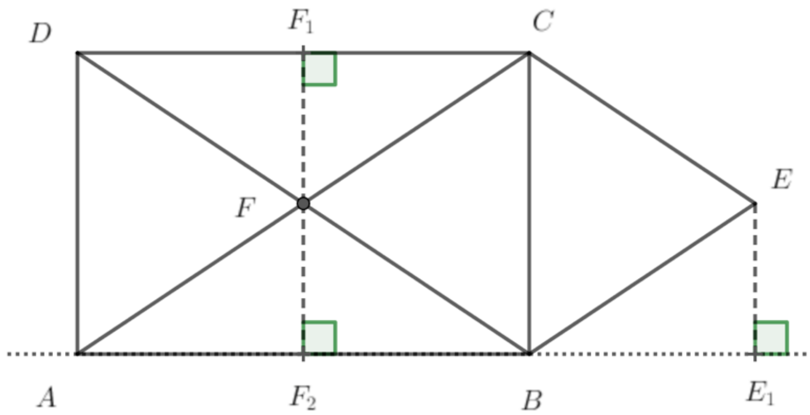
Exercice 2 : $ABCD$ est un rectangle (avec $AB = 4$ et $AD = 3$) de centre F et E est le symétrique de F par rapport à (BC)
Calculer les produits scalaires suivants :
a) $\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}$ c) $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB}$
d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BE}$ e) $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{DC}$ f) $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE}$



On pourra rajouter des projetés orthogonaux sur le dessin pour s'aider.

Corrigé :

a) $\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF_1}.\overrightarrow{CD}$ avec F_1 projeté orthogonal de F sur (CD).
$= CF_1 \times CD = 4 \times 2 = 8$ car $\overrightarrow{CF_1}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens.



b) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE_1}$ avec E_1 projeté orthogonal de E sur (AB).

$= -BA \times BE_1 = -4 \times 2 = -8$ car $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BE_1}$ sont colinéaires de sens contraire.

c) $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF_2}.\overrightarrow{AB}$ avec F_2 projeté orthogonal de F sur (AB).

$= AF_2 \times AB = 2 \times 4 = 8$ car $\overrightarrow{AF_2}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de même sens.

d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BE_1}$

$= AB \times BE_1 = 4 \times 2 = 8$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE_1}$ sont colinéaires de même sens.

e) $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BF}.\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ du fait que $ABCD$ soit un rectangle.

$= -BF_2 \times AB = -2 \times 4 = -8$ car $\overrightarrow{BF_2}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de sens contraire.

f) $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AF_2}.\overrightarrow{BE_1}$

$= AF_2 \times BE_1 = 2 \times 2 = 4$ car $\overrightarrow{AF_2}$ et $\overrightarrow{BE_1}$ sont colinéaires de même sens.

Remarque : la largeur $AD = 3$ ne servait à rien dans cet exercice.

Exercice 3 : dans chacun des cas suivants, calculer le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$:

a) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u};\vec{v}) = 60°$.

b) $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ radians.

c) $\|\vec{u}\| = 8$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ et $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{3\pi}{4}$ radians.

d) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $(\vec{u};\vec{v}) = 135°$.

Corrigé :

a) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 2 \times 3 \times \cos(60°) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$

b) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 1 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

c) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 8 \times \sqrt{2} \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -8$

d) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 5 \times \sqrt{3} \times \cos(135°) = 5\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{15}{2}$

Exercice 4 : déterminer une valeur en radian de l'angle de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$ dans chacun des cas suivants :

a) $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = -6$

b) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{6}$

Corrigé :

a) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) \Leftrightarrow -6 = 6 \times 2 \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) \Leftrightarrow \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$

Donc $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$

b) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) \Leftrightarrow \sqrt{6} = 2 \times \sqrt{3} \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) \Leftrightarrow \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

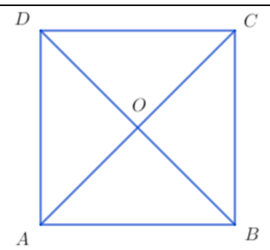
Donc $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 5 : on considère le carré $ABCD$ de côté 5. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

On passera par la définition avec le cosinus et on pourra réaliser un dessin à main levée pour visualiser la situation.

Corrigé :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 5 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{25\sqrt{2}}{2}$



Exercice 6 : dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

a) On pose $\vec{u}(2;-3)$ et pose $\vec{v}\left(4;\frac{5}{3}\right)$. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$.

b) On pose $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}2\\y\end{pmatrix}$. Déterminer y sachant que $\vec{w}.\vec{t}=1$.

Corrigé :

a) $\vec{u}.\vec{v}=2\times 4+(-3)\times\frac{5}{3}=8-5=3$

b) $\vec{w}.\vec{t}=1=5\times 2+(-3)\times y\Leftrightarrow 1=10-3y\Leftrightarrow -9=-3y\Leftrightarrow y=\frac{-9}{-3}=3$ donc $y=3$ ou $\vec{t}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

Exercice 7 : soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$. Calculer :

a) $\vec{u}.\vec{v}$ b) $(4\vec{u}).\vec{v}$ c) $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$

Corrigé :

a) $\vec{u}.\vec{v}=-2\times(-1)+3\times(-5)=2-15=-13$

b) $4\vec{u}\begin{pmatrix}-8\\12\end{pmatrix}$ donc $(4\vec{u}).\vec{v}=-8\times(-1)+12\times(-5)=8-60=-52$

c) $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}-2-(-1)\\3-(-5)\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix}$

$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}-2+(-1)\\3+(-5)\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$

Ainsi : $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})=-1\times(-3)+8\times(-2)=3-16=-13$

Exercice 8 : soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$. Calculer :

a) $\vec{u}.\vec{v}$ b) $\vec{w}.\vec{v}$ c) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})$ d) $(-2\vec{u}).\vec{v}+3(\vec{v}.\vec{w})$

Corrigé :

a) $\vec{u}.\vec{v}=2\times(-3)+1\times(-1)=-6-1=-7$

b) $\vec{w}.\vec{v}=1\times(-3)+4\times(-1)=-3-4=-7$

c) $\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=2\times(-2)+1\times 3=-4+3=-1$

d) $(-2\vec{u}).\vec{v}=-2\vec{u}.\vec{v}=-2\times(-7)=14$ et $3(\vec{v}.\vec{w})=3(\vec{w}.\vec{v})=3\times(-7)=-21$

Donc $(-2\vec{u}).\vec{v}+3(\vec{v}.\vec{w})=14+(-21)=-7$

Remarque : on pouvait faire des regroupements différents.

Exercice 9 : on considère les points $A(-2;3)$, $B(-1;-2)$, $C(0;4)$ et $D(2;5)$. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ d) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}$

Corrigé :

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ De même $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=1\times 1+(-5)\times 6=1-30=-29$

b) $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BD}=-1\times 3+(-6)\times 7=-3-42=-45$

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=1\times 2+(-5)\times 1=2-5=-3$

d) $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}=-1\times 4+5\times 2=-4+10=6$

Exercice 10 : on se situe dans un repère orthonormé du plan

a) Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\-6\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

b) On donne les points $A(-3;-2)$ et $B(1;3)$, et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$.

Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

Corrigé :

a) $\vec{u}.\vec{v} = -3\times(-8)+4\times(-6) = 24-24 = 0$ donc $\vec{u}\perp\vec{v}$ (autrement dit : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux).

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-3)\\3-(-2)\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 4\times(-5)+5\times4 = -20+20 = 0$. En effet, $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

Exercice 11 : dans les cas suivants :

1) Dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$

2) Dire si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires :

a) $A(2\,;\,-3)$, $B(-1\,;\,-1)$, $C(5\,;\,-3)$ et $D(2\,;\,1)$

b) $A(-1\,;\,-2)$, $B(-2\,;\,-4)$, $C(7\,;\,-1)$ et $D(3\,;\,1)$

3) Déterminer la ou les valeurs de a pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\a+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a+5\\3\end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\-3+a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\a\end{pmatrix}$

Corrigé :

1) a) $\vec{u}.\vec{v} = -1\times3+3\times(-1) = -3-3 = -6\neq0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

b) $\vec{u}.\vec{v} = 2\times(-6)+4\times3 = -12+12 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-2\\-1-(-3)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$. De même $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -3\times(-3)+2\times4 = 9+8 = 17\neq0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux

Donc (AB) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

b) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -1\times(-4)+(-2)\times2 = 4-4 = 0$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

3) a) $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow -5\times1+4\times a = 0 \Leftrightarrow -5+4a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{4}$

b) $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2\times(a+5)+(a+1)\times3 = 0 \Leftrightarrow 2a+10+3a+3 = 0 \Leftrightarrow 5a+13 = 0$

$\Leftrightarrow a = -\frac{13}{5}$

c) $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2a+a(-3+a) = 0 \Leftrightarrow 2a-3a+a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2-a = 0 \Leftrightarrow a(a+1) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ ou $a = -1$ (produit nul)

Exercice 12 : donner un vecteur directeur pour chacune des droites suivantes et en déduire qu'elles sont perpendiculaires.

a) $d_1: 2x-3y+4 = 0$ et $d_2: 3x+2y-1 = 0$

b) $d_1: x-y+3 = 0$ et $d_2: 2x+2y-1 = 0$

c) $d_1: y = 3x+1$ et $d_2: -x+3y-1 = 0$

<u>Rappels</u> : une droite d d'équation cartésienne $ax+by+c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Une droite d'équation réduite $y = mx+p$ a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

Corrigé :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ dirige d_1 et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ dirige d_2.

Or $\vec{u}.\vec{v} = 3\times(-2)+2\times3 = -6+6 = 0$ donc $\vec{u}\perp\vec{v}$ donc $d_1\perp d_2$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ dirige d_1 et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ dirige d_2.

Or $\vec{u}.\vec{v} = 1 \times (-2) + 1 \times 2 = -2 + 2 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{v}$ donc $d_1 \perp d_2$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ dirige d_1 et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ dirige d_2.

Or $\vec{u}.\vec{v} = 1 \times (-3) + 3 \times (-1) = -3 - 3 = -6 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux donc d_1 et d_2 ne sont pas perpendiculaires.

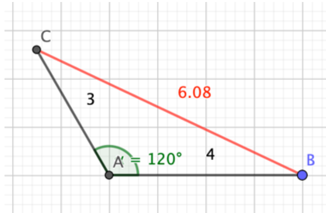
Exercice 15 : on considère les points A, B et C tels que $AB = 3$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 120°$.
Déterminer la longueur BC. *On pourra réaliser une figure à main levée pour visualiser la situation.*

Corrigé :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \cos 120°$

$= 9 + 16 - 24 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 37$

Donc $BC = \sqrt{37}$



Exercice 16 : on considère les points M, N et P tels que $MN = 5$, $NP = 7$ et $\widehat{MNP} = 61°$.
Déterminer la longueur MP.

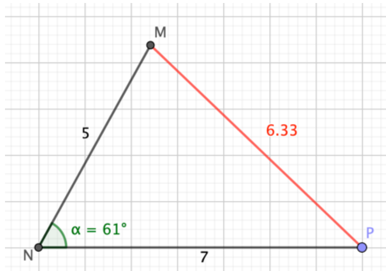
Corrigé :

$MP^2 = NP^2 + NM^2 - 2 \times NP \times NM \times \cos\widehat{MNP}$

$= 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \cos 61°$

$\approx 25 + 49 - 70 \times 0{,}485 \approx 40{,}05$

Donc $BC \approx \sqrt{40{,}05} \approx 6{,}33$



Exercice 17 : soit un triangle EFG tel que $EF = 7$, $FG = 6$ et $EG = 11$. Déterminer la valeur en degrés et arrondie au dixième de l'angle $\widehat{EFG}$.

Corrigé :

$EG^2 = FG^2 + EF^2 - 2 \times FG \times EF \times \cos\widehat{EFG}$

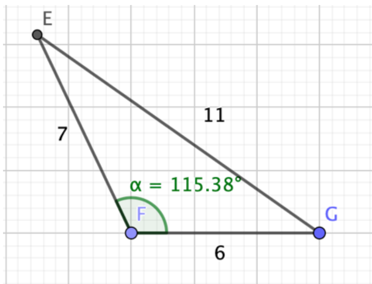
$\Leftrightarrow 11^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \times 7 \times 6 \times \cos\widehat{EFG}$

$\Leftrightarrow 121 = 49 + 36 - 84 \times \cos\widehat{EFG}$

$\Leftrightarrow 36 = -84\cos\widehat{EFG}$

$\Leftrightarrow \cos\widehat{EFG} = -\frac{36}{84}$

A la calculatrice : $\widehat{EFG} \approx 115{,}38°$



Exercice 18 : soit EFG un triangle avec $EF = 5$, $FG = 8$ et $\widehat{EFG} = 60°$.

a) Déterminer la valeur exacte de EG, puis une valeur approchée arrondie au dixième.

b) Déterminer une valeur approchée de $\widehat{FGE}$ arrondie à l'unité.

Corrigé :

a) $EG^2 = FG^2 + EF^2 - 2 \times FG \times EF \times \cos\widehat{EFG}$

$= 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos 60° = 64 + 25 - 80 \times \frac{1}{2}$

$= 89 - 40 = 49$ donc $EG = \sqrt{49} = 7$

b) $FE^2 = GF^2 + GE^2 - 2 \times GF \times GE \times \cos\widehat{FGE}$

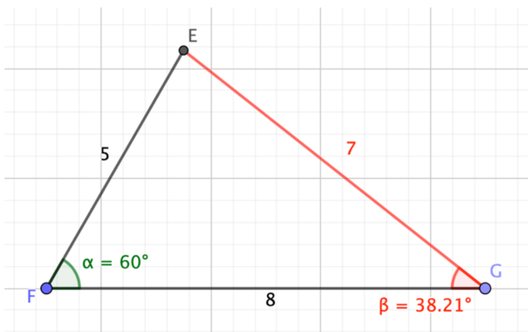
$\Leftrightarrow 5^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \times 8 \times 7 \times \cos\widehat{FGE}$

$\Leftrightarrow 25 = 64 + 49 - 112 \times \cos\widehat{FGE}$

$\Leftrightarrow -88 = -112\cos\widehat{FGE}$

$\Leftrightarrow \cos\widehat{FGE} = \frac{88}{112}$

A la calculatrice : $\widehat{FGE} \approx 38{,}21°$



Exercice 19 : on donne les points A et B tels que $AB = 12$ et I le milieu du segment $[AB]$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 4$.

Corrigé :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 4 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 4 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}12^2 = 4 \Leftrightarrow MI^2 - 36 = 4 \Leftrightarrow MI^2 = 40 \Leftrightarrow MI = \sqrt{40}$$

Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{40}$.

Exercice 20 : on donne les points C et D tels que $CD = 10$ et H le milieu du segment $[CD]$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = -9$.

Corrigé :

$$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = -9 \Leftrightarrow MH^2 - \frac{1}{4}CD^2 = -9 \Leftrightarrow MH^2 - \frac{1}{4}10^2 = -9 \Leftrightarrow MH^2 - 25 = -9$$
$$\Leftrightarrow MH^2 = 16 \Leftrightarrow MH = 4$$

Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre H et de rayon 4.

Exercice 21 : on considère les points $A(-2; -3)$ et $B(-1; 4)$.

1. Calculer la longueur AB.
2. Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Corrigé :

a) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\left(-1-(-2)\right)^2 + \left(4-(-3)\right)^2} = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$

b) $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{-2+(-1)}{2}; \frac{-3+4}{2}\right)$ d'où $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

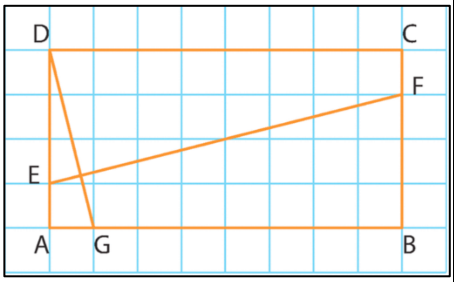
c) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}\sqrt{50}^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 - 12{,}5 = 0$

$$\Leftrightarrow MI^2 = 12{,}5 \Leftrightarrow MI = \sqrt{12{,}5}$$

Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{12{,}5}$.

Exercice 24 : dans un rectangle $ABCD$ de longueur 8 et de largeur 4, on place les points E, F et G tels que :
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

1. Dans le repère $(A; G, E)$,
   donner les coordonnées de tous les points de la figure.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{DG}$.
3. Que peut-on en déduire ?



Corrigé :

a) Dans le repère $(A; G, E)$:

$A(0; 0)$, $G(1; 0)$ et $E(0; 1)$ car ce sont l'origine et les points unitaires du repère.

De plus, on a $B(8; 0)$ et $D(0; 4)$ car ils sont sur les axes du repère.

Pour finir, $C(8; 4)$ et $F(8; 3)$.

b) $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 8-0 \\ 3-1 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

De même $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{DG} = 8 \times 1 + 2 \times (-4) = 8 - 8 = 0$

c) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont donc orthogonaux, ce qui signifie que $(DE) \perp (DG)$.