Exercice 1:

I) 3ème : Sciences &Techniques &Maths

Soit [AB] un segment de longueur 4. Déterminer chacune des ensembles :

A= { M∈P/ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ }.

B= { M∈P/ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=0$ }.

C= { M∈P/ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=24$ }.

D = { M∈P/ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-8$ }.

E = { M∈P/ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=2$ }.

F = { M∈P/ $MA^2+MB^2=40$ }.

G= { M∈P/ $MA^2-MB^2=0$ }.

H = { M∈P/ $MA^2-MB^2=24$ }.

II) 3ème : Maths

On veut déterminer l'ensemble H tel que H = { M∈P/ $MA^2-4MB^2=24$ }.

a. Montrer que :

$$MA^2-4MB^2=(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})\ (\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB})$$

b. On pose I le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,2) et J le barycentre des points pondères (A,1) et (B,-2)

Montrer que : $MA^2-4MB^2=-3\overrightarrow{MI}\overrightarrow{MJ}$

c.Soit K le milieu de [IJ].

Montrer que $\overrightarrow{JI}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ puis déduire que $KA=\frac{16}{3}$

d.On déduire l'ensemble des points H

Correction:

I)

A/ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ c'est le cercle de diamètre [AB]

B/ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$ L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) passant par A

C/

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=24$

Soit H le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}=24$

On a $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$ donc $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AM})=0$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MH}=0$

L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H

D/

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-8$

Soit H le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}=-8$

On a $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$ donc $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AM})=0$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MH}=0$

L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H

E/ Soit I le milieu de [AB]

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=2$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=2$

$\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{MI}\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\overrightarrow{IB}=2$

$\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{MI}(\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}})-IA^2=2$

$\Leftrightarrow MI^2-\dfrac{AB^2}{4}=2$

$\Leftrightarrow MI^2=2+\dfrac{AB^2}{4}$

$MI^2=2+\dfrac{16}{4}=6\Leftrightarrow MI^2=6$ donc C est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$

F-

$MA^2+MB^2=40\Leftrightarrow(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2=40$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2=40$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 = 40$

$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\underbrace{(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})}_{\vec{0}} + IA^2 + IB^2 = 40$

$\Leftrightarrow 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 40 \Leftrightarrow 2MI^2 + 4 + 4 = 40$

$\Leftrightarrow 2MI^2 + 8 = 40$

$\Leftrightarrow 2MI^2 = 32$ donc $MI^2 = 16$ donc $MI = 4$

F est le cercle de centre I et de rayon 4

G-

G= $\{ M \in P / \ MA^2 - MB^2 = 0 \}$.

$MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

Donc MA=MB

L'ensemble des points G est la médiatrice de [AB]

H-

$MA^2 - MB^2 = 24 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\ (\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}) = 24$

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\overrightarrow{BA} = 24 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\overrightarrow{BA} = 24$

$\Leftrightarrow (2\overrightarrow{MI} + \underbrace{(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})}_{\vec{0}})\overrightarrow{BA} = 24 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\overrightarrow{BA} = 24$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\overrightarrow{BA} = 24$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\overrightarrow{AB} = 12$

Soit H le point de (AB) tel que $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = 12$

On a $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$ donc $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{IH} - \overrightarrow{IM}) = 0$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MH} = 0$

L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H

II)

a. $MA^2 - 4MB^2 = (\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})\ (\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB})$

b. $MA^2 - 4MB^2 = (\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})\ (\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IB})\ (\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{MJ}-2\overrightarrow{JB})$

$= (3\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB})\ (-\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB})$

I le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,2)

J le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,-2)

$$= (3\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}})\ (-\overrightarrow{MJ} + \underbrace{\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB}}_{\vec{0}}) = -3\overrightarrow{MI}\overrightarrow{MJ}$$

c.

- I le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,2) donc $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

J le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,-2) donc $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$$

- K le milieu de [JI] donc $\overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JI}$

$$\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}(-\frac{4}{3})\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{KA} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $KA = \frac{4}{3}AB = \frac{16}{3}$

d)

$-3\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 24 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KI}).(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KJ}) = -8$

$\Leftrightarrow (MK^2 + \overrightarrow{MK}\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KI}\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KI}\overrightarrow{KJ}) = -8$

$\Leftrightarrow (MK^2 + \overrightarrow{MK}(\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ}) - KA^2) = -8$

$\Leftrightarrow MK^2 - KA^2 = -8$

$\Leftrightarrow MK^2 = -8 + KA^2$

$\Leftrightarrow MK^2 = -8 + \frac{256}{9} = \frac{184}{9}$

G est le cercle de centre k et de rayon $\frac{\sqrt{184}}{3}$