Exercice 5A.1 : Résoudre les équations suivantes sur $]-\pi;\pi]$:

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$

b) $4\cos^2 x - 3 = 0$

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $4\sin^2 x - 2 = 0$

Exercice 5A.2 : Résoudre les équations suivantes dans le domaine demandé.

1) $\cos(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

2) $\sin(t) = \frac{-1}{2}$ sur $\mathbb{R}$

3) $\cos(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ sur $]-\pi;\pi]$

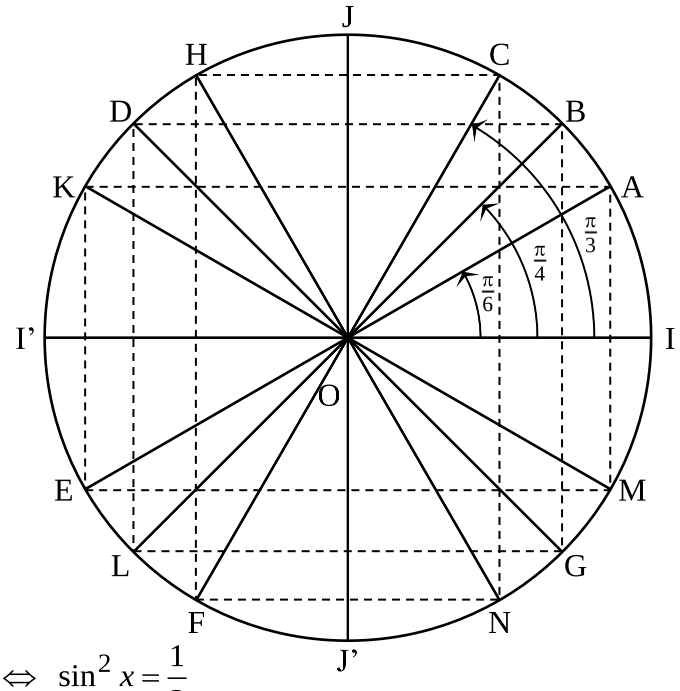
4) $\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0;2\pi[$

Exercice 5A.3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\sin^2 x - 5\sin x + 6 = 0$
2) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
3) $2\cos^3 x + 5\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$
4) $2\cos^2 x - \cos x = 0$

Exercice 5A.1 :

Résoudre les équations suivantes sur $\left]-\pi;\pi\right]$*:*



a) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$: $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3}; -\dfrac{2\pi}{3}\right\}$

b) $4\cos^2 x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow\ 4\cos^2 x = 3$

$\Leftrightarrow\ \cos^2 x = \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{5\pi}{6}\right\}$

c) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3}; -\dfrac{2\pi}{3}\right\}$

d) $4\sin^2 x - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ 4\sin^2 x = 2 \ \Leftrightarrow\ \sin^2 x = \dfrac{2}{4} \ \Leftrightarrow\ \sin^2 x = \dfrac{1}{2}$

Soit $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{3\pi}{4}\right\}$

Exercice 5A.2 : *Résoudre les équations suivantes dans le domaine demandé.*

1) $\cos(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$: $S = \left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$

2) $\sin(t) = -\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$: $S = \left\{-\dfrac{5\pi}{6} + k\times 2\pi; -\dfrac{\pi}{6} + k\times 2\pi\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$

3) $\cos(t) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ sur $\left]-\pi;\pi\right]$

Pour tout réel t : $-1 \le \cos(t) \le 1$ or $\dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$

Sur $\left]-\pi;\pi\right]$: $\cos(t) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ n'a pas de solution : $S = \varnothing$

4) $\cos(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\left[0; 2\pi\right[$: $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

Exercice 5A.3 :

1) $\sin^2 x - 5\sin x + 6 = 0$: on effectue un changement de variables, on pose $X = \sin x$

l'équation devient : $X^2 - 5X + 6 = 0$

calcul du discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4\times 6 = 25 - 24 = 1 = 1^2$

les solutions sont : $X_1 = \dfrac{-(-5)-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $X_2 = \dfrac{-(-5)+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

or $X = \sin x$, donc soit $\sin x = 2$, soit $\sin x = 3$, ce qui est impossible donc $S = \varnothing$.

2) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

on pose $X=\sin x$, l'équation devient : $2X\quad -X-1=0$

calcul du discriminant : $\Delta=(-1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=3^2$

les solutions sont : $X_1=\dfrac{-(-1)-3}{2\times2}=\dfrac{1-3}{4}=-\dfrac{1}{2}$ et $X_2=\dfrac{-(-1)+3}{2\times2}=\dfrac{1+3}{4}=1$

or $X=\sin x$, donc :

soit $\sin x=-\dfrac{1}{2}$, ainsi :

soit $x=-\dfrac{\pi}{6}+k\times2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, soit $x=-\dfrac{5\pi}{6}+k\times2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

soit $\sin x=1$, ainsi :

$x=\dfrac{\pi}{2}+k\times2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Les solutions sont : $S=\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\times2\pi;\ \dfrac{5\pi}{6}+k\times2\pi;\ \dfrac{\pi}{2}+k\times2\pi\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$.

3) $2\cos^3x+5\cos^2x+\cos x-2=0$: on pose : $X=\cos x$

on doit alors résoudre : $2X^3+5X^2+X-2=0$ → -1 est racine évidente, on factorise par $X+1$

d'où par division :

$$\begin{array}{r|l} 2X^3+5X^2+X-2 & X+1 \\ \hline -\underline{(2X^3+2X^2)} & 2X^2+3X-2 \\ 3X^2+X & \\ -\underline{(3X^2+3X)} & \\ -2X-2 & \\ -\underline{(-2X-2)} & \\ 0 & \end{array}$$

donc on doit résoudre : $(X+1)(2X^2+3X-2)=0$

calcul du discriminant : $\Delta=3^2-4\times2\times(-2)=9+16=25=5^2$

les solutions sont : $X_1=\dfrac{-3-5}{2\times2}=\dfrac{-8}{4}=-2$ et $X_2=\dfrac{-3+5}{2\times2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

or $X=\cos x$, donc soit : $\cos x=-1$, soit : $\cos x=-2$, soit : $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+k\times2\pi$; $\cos x=-2$ n'a pas de solution

$\cos x=\dfrac{1}{2}$: soit $x=\dfrac{\pi}{3}+k\times2\pi$, soit $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\times2\pi$

donc $S=\left\{\pi+k\times2\pi;\dfrac{\pi}{3}+k\times2\pi;-\dfrac{\pi}{3}+k\times2\pi\right\}$

4) $2\cos^2x-\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos x-1)=0$

Soit : $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$

Soit : $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}$ → $x=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x=-\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{\pi}{2}[\pi];\dfrac{\pi}{3}[2\pi];-\dfrac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$ et $S_{]-\pi;\pi]}=\left\{-\dfrac{\pi}{3};-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{3}\right\}$